



Caractères de rigidité du groupe de Grothendieck–Teichmüller

Ivan Marin

ABSTRACT

Let \mathbb{k} be a (topological) field of characteristic 0. To any representation of a given Hopf algebra $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$, one can associate (using a Drinfeld associator) a representation $\widehat{\Phi}(\rho)$ of the braid group over the field $\mathbb{k}((h))$ of Laurent series. We investigate the dependence on Φ of $\widehat{\Phi}(\rho)$ for a certain class of representations (so-called GT-rigid representations) and from this dependence deduce (continuous) projective representations of the Grothendieck–Teichmüller group $GT_1(\mathbb{k})$; in particular, for $\mathbb{k} = \mathbb{Q}_l$ we obtain representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$. In most situations, these projective representations can be decomposed into linear characters, as we do for the representations of the Iwahori–Hecke algebra of type A. In this case, moreover, we express $\widehat{\Phi}(\rho)$ when Φ is even and obtain unitary matrix models for the representations of the Iwahori–Hecke algebra. The representations of this algebra corresponding to hook diagrams have noteworthy properties under the action of $GT_1(\mathbb{k})$.

1. Introduction

Drinfeld a introduit dans [Dri91], pour tout corps \mathbb{k} de caractéristique 0 et tout $\lambda \in \mathbb{k}$ une famille $\mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k})$ de séries formelles Φ en deux variables non commutatives qui permettent de construire des morphismes $\widetilde{\Phi}$ d'un complété $B_n(\mathbb{k})$ du groupe de tresses B_n vers le groupe des inversibles de la complétion d'une certaine \mathbb{k} -algèbre de Hopf graduée $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$. Ces séries sont appelées des associateurs (de Drinfeld). On en déduit dans [Mar05] des foncteurs $\widehat{\Phi}$ de la catégorie des représentations (ici toujours supposées de dimension finie) de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ vers la catégorie des représentations de B_n sur le corps des séries de Laurent $K = \mathbb{k}((h))$. L'intérêt de ces foncteurs est, d'une part, que les représentations de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ sont plus aisées à étudier et à construire que celles de B_n , et d'autre part que ces foncteurs jouissent de bonnes propriétés en termes de théorie des représentations. Notamment, l'irréductibilité et l'absolue irréductibilité des représentations est préservée. De plus, certains associateurs (les associateurs « réels », c'est-à-dire si $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$) permettent de construire des représentations unitaires de B_n ; ceci sans pour autant donner de modèle matriciel, l'explicitation de tels associateurs étant en général délicate.

La première motivation de ce travail est d'expliciter ce qui résulte d'un changement d'associateur. Si ρ est une des représentations irréductibles usuelles de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$, les représentations $\widehat{\Phi}_1(\rho)$ et $\widehat{\Phi}_2(\rho)$ de B_n pour $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k})$ et $\lambda \neq 0$ sont conjuguées par des endomorphismes diagonalisables. Nous nous intéressons ici à ces endomorphismes, notamment dans le cas des représentations de l'algèbre d'Iwahori–Hecke de type A, quotient classique de l'algèbre de groupe de B_n .

La deuxième motivation concerne le groupe de Grothendieck–Teichmüller introduit par Drinfeld dans [Dri91]. Ce groupe se décline en trois versions, le groupe profini \widehat{GT} , sa composante

Received 13 March 2005, accepted in final form 16 September 2005.

2000 Mathematics Subject Classification 14G32, 20C99, 20C08, 20F36.

Keywords: representations, braid groups, Iwahori–Hecke algebras, Grothendieck–Teichmüller group.

This journal is © Foundation Compositio Mathematica 2006.

pro- l notée $GT^{(l)}$, et la version \mathbb{k} -pro-unipotente $GT(\mathbb{k})$. Ils se décomposent comme produit semi-direct d'un tore et d'un sous-groupe \widehat{GT}_1 , $GT_1^{(l)}$ ou $GT_1(\mathbb{k})$. L'intérêt arithmétique de ces groupes est que le groupe de Galois absolu de \mathbb{Q} se plonge naturellement dans \widehat{GT} . On a d'autre part des morphismes canoniques $\widehat{GT} \rightarrow GT^{(l)} \hookrightarrow GT(\mathbb{Q}_l)$, dont on déduit un morphisme du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ vers $GT_1(\mathbb{Q}_l)$.

Ce groupe \widehat{GT} (respectivement $GT(\mathbb{k})$) s'identifie à un groupe d'automorphismes d'une complétion pro-finie \widehat{B}_n de B_n (respectivement de la complétion $B_n(\mathbb{k})$), de même que B_n s'identifie, par l'action d'Artin, à un groupe d'automorphismes d'un groupe libre F . Dans ce dernier cas, on obtient classiquement des représentations projectives de B_n à partir de certaines représentations de F , les « systèmes locaux rigides », c'est-à-dire les représentations irréductibles de F dont la classe d'isomorphisme est inchangée après torsion par l'action de B_n . De façon analogue, nous associons ici des représentations projectives Q_R de $GT_1(\mathbb{k})$ à certaines représentations $R = \widehat{\Phi}(\rho)$, qui présentent de plus la particularité que Q_R se décompose en caractères linéaires à valeurs dans K^\times . Parmi ces représentations, dites GT-rigides et agrégeantes, se trouvent notamment les représentations irréductibles de l'algèbre d'Iwahori–Hecke de type A. Si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}_l$, les caractères obtenus induisent enfin des caractères linéaires du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_l((h))^\times$.

On note P_n le groupe de tresses pures. Les résultats principaux de l'article sont les suivants.

THÉORÈME A. *Soit ρ une représentation absolument irréductible et GT-rigide de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$, $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour un certain $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$, $\lambda \neq 0$. Q_R est une représentation projective continue de $GT_1(\mathbb{k})$, non triviale si et seulement si $R([P_n, P_n]) = \{1\}$. Si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}_l$, Q_R induit une représentation projective continue du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$, non triviale si et seulement si $R([P_n, P_n]) = \{1\}$. Si ρ est agrégeante, ces représentations projectives se décomposent en facteurs linéaires.*

D'après [Mar05], un moyen d'obtenir des représentations unitaires de B_n consiste à calculer $\widehat{\Phi}(\rho)$ pour ρ une représentation de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ satisfaisant certaines conditions de symétrie et $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ un associateur tel que $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0$. En particulier, l'unitarité des représentations de l'algèbre d'Iwahori–Hecke est expliquée par cette construction à partir de représentations particulières de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$, les représentations infinitésimales de l'algèbre d'Iwahori–Hecke. En revanche, aucun associateur réel n'étant à l'heure actuelle explicitement connu, il est en général difficile de calculer $\widehat{\Phi}(\rho)$. Néanmoins, on sait qu'existe $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{Q})$ pair, c'est-à-dire tel que $\Phi(-x, -y) = \Phi(x, y)$.

THÉORÈME B. *Si ρ est une représentation infinitésimale de l'algèbre d'Iwahori–Hecke, et $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ pour $\lambda \neq 0$ est pair, un modèle matriciel de $\widehat{\Phi}(\rho)$ est donné par la proposition 4. En particulier, si $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$, ces représentations sont unitaires au sens de [Mar05].*

L'étude de Q_R pour R la représentation de Burau réduite (avec n variable) fait apparaître une famille de caractères χ_d , $d \geq 2$, de $GT_1(\mathbb{k})$ vers $(\mathbb{k}[[h]])^\times$.

THÉORÈME C. *Les caractères χ_d , $d \geq 2$, sont algébriquement indépendants. Si R est une représentation irréductible de l'algèbre d'Iwahori–Hecke de type A, les caractères intervenant dans la décomposition de Q_R sont des monômes (explicitement déterminés) en les χ_d .*

Une représentation irréductible R de l'algèbre d'Iwahori–Hecke associée à un diagramme de Young α étant donnée, une situation remarquable se produit lorsque les caractères qui interviennent dans la décomposition de Q_R sont deux à deux distincts. On dit alors que Q_R est sans résonances.

THÉORÈME D. *La représentation Q_R est sans résonances si et seulement si α est en équerre ou correspond à la partition $[2, 2]$.*

Cet article comporte trois parties, qui exposent successivement les préliminaires nécessaires, les propriétés générales des actions de $GT_1(\mathbb{k})$ obtenues, et enfin l'étude particulière aux représentations

de l’algèbre d’Iwahori–Hecke. Le théorème A est démontré en §§ 3.3 et 3.4 (corollaire de la proposition 2 et proposition 3). Le théorème B est démontré en § 4.4 (proposition 4), le théorème C en § 4.5 et le théorème D en § 4.6 (proposition 6). Certains calculs utiles sont repoussés en appendice, ainsi qu’une généralisation de ces représentations projectives de $GT_1(\mathbb{k})$ en des 1-cocycles de $GT(\mathbb{k})$.

2. Préliminaires

2.1 Tresses et tresses infinitésimales

On note B_n pour $n \geq 1$ le groupe de tresses à n brins, en convenant $B_1 = \{e\}$. On note P_n le groupe de tresses pures, noyau de la surjection canonique $\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$, \mathfrak{S}_n désignant le groupe symétrique sur n lettres. Pour $r < n$, on identifiera B_r au sous-groupe de B_n formé des tresses qui laissent les $n - r$ derniers brins droits. Soit \mathbb{k} un \mathbb{Q} -anneau, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{k})$ la \mathbb{k} -algèbre de Lie d’holonomie définie par générateurs $t_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ et relations $t_{ii} = 0, t_{ij} = t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}] = 0$ si $\#\{i, j, k, l\} = 4$ et $[t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0$ pour tous i, j, k . Soit alors $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ la version infinitésimale du groupe de tresses, c’est-à-dire le produit semi-direct de l’algèbre de groupe $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ du groupe symétrique par l’algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{T}_n(\mathbb{k})$, l’action donnant le produit semi-direct étant $s.t_{ij} = t_{s(i)s(j)}$. Ces algèbres sont naturellement graduées, par $\deg(t_{ij}) = 1$ et $\deg(s) = 0$ si $s \in \mathfrak{S}_n$. On note $\widehat{\mathcal{T}}_n(\mathbb{k})$ et $\widehat{\mathfrak{B}}_n(\mathbb{k})$ leur complété par rapport à cette graduation.

On notera $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ les générateurs d’Artin classiques de B_n , $\xi_{ij} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}$ les générateurs traditionnels de P_n , et $\delta_r = \sigma_{r-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{r-1}$. Rappelons que ces éléments $\delta_2, \dots, \delta_r$ engendrent un sous-groupe abélien libre à l’intérieur de P_n , et que de plus $\delta_r = \gamma_r \gamma_{r-1}^{-1}$ où $\gamma_r = (\sigma_1 \dots \sigma_{r-1})^r \in B_r$ engendre le centre de B_r pour $r \geq 3$. Les analogues infinitésimaux de δ_r et γ_r sont notés $Y_r = t_{1r} + \dots + t_{r-1,r}$ et $Z_r = \sum_{1 \leq i, j \leq r} t_{ij}$. On a $Y_r = Z_r - Z_{r-1}$.

Soit $C^r P_n$ pour $r \geq 0$ la suite centrale descendante de P_n , définie par $C^0 P_n = P_n, C^1 P_n = [P_n, P_n]$ (groupe des commutateurs) et $C^{r+1} P_n = [P_n, C^r P_n]$. On note $P_n(\mathbb{k})$ ce que Drinfeld appelle la complétion \mathbb{k} -prounipotente de P_n , c’est-à-dire la limite projective des $(P_n/C^r P_n) \otimes \mathbb{k}$. Comme la suite centrale descendante de P_n est séparante, c’est-à-dire que les sous-groupes $C^r P_n$ ont une intersection triviale, et que de plus les quotients $P_n/C^r P_n$ sont sans torsion, le morphisme naturel de P_n dans ces complétions est injectif. L’action par conjugaison de B_n sur son sous-groupe P_n s’étend naturellement en une action de B_n sur $P_n(\mathbb{k})$. On note $B_n(\mathbb{k})$ le quotient de $B_n \times P_n(\mathbb{k})$ par le sous-groupe (distingué) engendré par les éléments $\sigma.\sigma^{-1}$ pour $\sigma \in P_n = B_n \cap P_n(\mathbb{k})$.

2.2 Groupe libre et groupe de Hausdorff

Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique 0, $\mathcal{A}(\mathbb{k}) = \mathbb{k}\langle\langle x, y \rangle\rangle$ la \mathbb{k} -algèbre des séries formelles à coefficients dans \mathbb{k} en des indéterminées non commutatives x et y . Si \mathbb{k} est un corps topologique, on munit $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ de la topologie de la convergence simple de ses coefficients, ce qui en fait une \mathbb{k} -algèbre topologique complète. On note $\mathcal{L}(\mathbb{k})$ l’ensemble des séries de Lie formelles en x et y à coefficients dans \mathbb{k} , naturellement identifiée à la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ formée des séries de Lie en x et y , et $\mathcal{A}_+(\mathbb{k}) \subset \mathcal{A}(\mathbb{k})$ l’ensemble des éléments de terme constant nul. Inversement, $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ s’identifie à la complétion de l’algèbre enveloppante universelle de l’algèbre de Lie libre sur x, y pour la graduation $\deg(x) = \deg(y) = 1$. L’ordre $\omega(f)$ de $f \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$ est par définition le degré de son monôme de plus bas degré. On note encore $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ ce que Bourbaki appelle le groupe de Magnus, c’est-à-dire le groupe des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ de terme constant égal à 1, et $\mathcal{H}(\mathbb{k}) = \exp \mathcal{L}(\mathbb{k}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{k})$, c’est-à-dire le groupe de Hausdorff, ensemble des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui sont grouplike pour sa structure naturelle d’algèbre de Hopf complétée. Si \mathbb{k} est un corps topologique, toutes ces parties de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ sont munies de la topologie induite.

Il est classique (cf. [Bou, ch. II, § 5]) que l’exponentielle et le logarithme fournissent des isomorphismes entre $\mathcal{A}_+(\mathbb{k})$ et $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ d’une part, $\mathcal{L}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{H}(\mathbb{k})$ d’autre part. On vérifie facilement que,

pour $f \in \mathcal{A}_+(\mathbb{k})$, les coefficients de $\exp(f)$ sont des polynômes en les coefficients de f , et qu'ainsi l'application $\exp : \mathcal{A}_+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{k})$ est continue si \mathbb{k} est un corps topologique. Il en est de même pour l'application logarithme, ce qui montre que $\mathcal{A}_+(\mathbb{k})$ et $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ d'une part, $\mathcal{L}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{H}(\mathbb{k})$ d'autre part, sont homéomorphes par ces applications.

Si $f(x, y) \in \mathcal{M}(\mathbb{k})$ et $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{k}) \subset \mathcal{A}_+(\mathbb{k})$, on définit classiquement la substitution $f(u, v)$. Si $f(x, y) \in \mathcal{M}(\mathbb{k})$ et $u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{k}) = \exp \mathcal{L}(\mathbb{k})$, on définit, suivant l'usage de Drinfeld dans [Dri91], $f(u, v)$ comme $f(\log(u), \log(v))$. Cette écriture s'étend naturellement et permet de définir $f(u, v)$ pour u, v dans la complétion \mathbb{k} -pro-unipotente de n'importe quel groupe. En particulier, pour $u, v \in P_n(\mathbb{k})$, $f(u, v) \in P_n(\mathbb{k})$.

Soit F le groupe libre en deux générateurs x, y . Il est classique (cf. [Bou, ch. II, §5, no. 3, théorème 1]) que l'application $x \mapsto e^x, y \mapsto e^y$ se prolonge en un morphisme de groupes qui plonge F dans $\mathcal{H}(\mathbb{k})$, et que ce plongement se factorise par la complétion pro-nilpotente \widehat{F} de F : on a $F \hookrightarrow \widehat{F} \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{k})$, le deuxième morphisme étant continu si \mathbb{k} est un corps topologique. De même, l'application $x \mapsto 1 + x, y \mapsto 1 + y$ plonge F et \widehat{F} dans $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ de façon continue. Si l'on étend les notations $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ de façon naturelle au cas où \mathbb{k} est un anneau unitaire, cette dernière application plonge en fait F et \widehat{F} dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

2.3 Associateurs de Drinfeld

Pour tout \mathbb{Q} -anneau \mathbb{k} et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, on définit suivant [Dri91] l'ensemble $\mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k})$ des $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui satisfont les équations suivantes :

$$\Delta(\Phi) = \Phi \hat{\otimes} \Phi, \tag{1}$$

$$\Phi(y, x) = \Phi(x, y)^{-1}, \tag{2}$$

$$e^{\lambda x/2} \Phi(z, x) e^{\lambda z/2} \Phi(y, z) e^{\lambda y/2} \Phi(x, y) = 1, \tag{3}$$

$$(d_3 \Phi)(d_1 \Phi) = (d_0 \Phi)(d_2 \Phi)(d_4 \Phi), \tag{4}$$

avec $z = -x - y$. Les équation (3) et (4) sont appelées équation de l'hexagone et du pentagone, respectivement. Dans la relation (1), le symbole $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété et Δ le coproduit associé à l'identification de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ avec la bigèbre enveloppante de $\mathcal{L}(\mathbb{k})$. Finalement, pour que l'équation (4) ait un sens, il nous faut définir

$$\begin{cases} d_3 \Phi = \Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24}), \\ d_1 \Phi = \Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34}), \\ d_0 \Phi = \Phi(t_{23}, t_{34}), \\ d_2 \Phi = \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}), \\ d_4 \Phi = \Phi(t_{12}, t_{23}), \end{cases}$$

de sorte que (4) est une équation dans $\widehat{UT}_4(\mathbb{k})$. Remarquons finalement que l'équation (1) est équivalente à dire que $\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$. On montre facilement que, pour tout \mathbb{Q} -anneau \mathbb{k} et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, $\mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k}) = \mathbb{A}ss_{-\lambda}(\mathbb{k})$. En particulier, à tout $\Phi \in \mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k})$ on peut associer un autre associateur $\overline{\Phi}(x, y) = \Phi(-x, -y) \in \mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k})$. Si l'on suppose qu'existe un $\Phi \in \mathbb{A}ss_\lambda(\mathbb{k})$, il est facile de déterminer la forme de ses premiers termes. En particulier, il existe toujours $\mathfrak{c} \in \mathbb{k}$ tel que $\Phi(x, y)$ vaille $1 + (\lambda^2/24)[x, y] + \mathfrak{c}([x, [x, y]] - [y, [y, x]])$ plus des termes d'ordre supérieur (cf. par exemple [Mar05, proposition 1]). Étant donnée l'importance pour nous de ce coefficient, nous le considérons comme une fonction $\mathfrak{c}(\Phi)$ de l'associateur.

Dans [Dri91], Drinfeld construit explicitement un associateur $\Phi_{KZ} \in \mathbb{A}ss_1(\mathbb{C})$ à partir de l'étude du système différentiel de Knizhnik et Zamolodchikov. Une formule explicite pour les coefficients de Φ_{KZ} est due à Le et Murakami. En particulier, $\mathfrak{c}(\Phi_{KZ}) = -\zeta(3)/(2i\pi)^3 \neq 0$,

donc $\Phi_{KZ} \neq \overline{\Phi}_{KZ}$ puisque $\mathfrak{c}(\overline{\Phi}) = -\mathfrak{c}(\Phi)$. Il introduit d'autre part l'ensemble des associateurs pairs $\mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda^0(\mathbb{k})$, définis comme l'ensemble des $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$ tels que $\overline{\Phi} = \Phi$, et montre $\mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_1^0(\mathbb{Q}) \neq 0$ (cf. [Dri91, proposition 5.3]).

Ces associateurs permettent de définir des morphismes de $B_n(\mathbb{k})$ vers le groupe $(\widehat{\mathfrak{B}}_n(\mathbb{k}))^\times$ des inversibles de $\widehat{\mathfrak{B}}_n(\mathbb{k})$. Plus précisément, à tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$ on associe un morphisme $\widetilde{\Phi} : B_n(\mathbb{k}) \rightarrow (\widehat{\mathfrak{B}}_n(\mathbb{k}))^\times$ tel que

$$\widetilde{\Phi}(\sigma_i) = \Phi(t_{i,i+1}, Y_i) s_i \exp(\lambda t_{i,i+1}/2) \Phi(Y_i, t_{i,i+1}).$$

On vérifie aisément (cf. [Mar05, proposition 2]) que $\widetilde{\Phi}(\delta_r) = \exp(\lambda Y_r)$ pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$ et $r \in [2, n]$.

2.4 Le groupe de Grothendieck–Teichmüller \mathbb{k} -pro-unipotent

Le groupe $GT(\mathbb{k})$ est l'ensemble des couples $(\lambda, f) \in \mathbb{k}^\times \times \mathcal{H}(\mathbb{k})$ qui vérifient $f(u, v) = f(v, u)^{-1}$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$, $f(w, u)w^m f(v, w)v^m f(u, v)u^m = 1$ pour tous $u, v, w \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$ tels que $uvw = 1$ et $m = (\lambda - 1)/2$ (équation de l'hexagone), et enfin une équation dans $P_4(\mathbb{k})$:

$$f(\xi_{12}, \xi_{23}\xi_{24})f(\xi_{13}\xi_{23}, \xi_{34}) = f(\xi_{23}, \xi_{34})f(\xi_{12}\xi_{13}, \xi_{24}\xi_{34})f(\xi_{12}, \xi_{23}).$$

Si \mathbb{k} est un corps topologique, on munit $GT(\mathbb{k})$ de la topologie naturelle de $\mathbb{k}^\times \times \mathcal{H}(\mathbb{k})$. C'est un groupe (topologique) muni de la loi $(\lambda_1, f_1) \cdot (\lambda_2, f_2) = (\lambda, f)$ avec $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$ et

$$f(u, v) = f_1(f_2(u, v)u^{\lambda^2} f_2(u, v)^{-1}, v^{\lambda^2})f_2(u, v).$$

En particulier, on a un morphisme de groupes (topologiques) $GT(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}^\times$, dont le noyau est noté $GT_1(\mathbb{k})$. Ces groupes admettent des analogues infinitésimaux, définis comme suit. Soit $GRT_1(\mathbb{k}) = \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_0(\mathbb{k})$, muni de la loi $f_1 \cdot f_2 = f$ avec $f(x, y) = f_1(f_2(x, y)x f_2(x, y)^{-1}, y)f_2(x, y)$. C'est une loi de groupe (topologique) et on a une action de \mathbb{k}^\times sur $GRT_1(\mathbb{k})$, définie par $c \cdot f(x, y) = f(c^{-1}x, c^{-1}y)$. L'analogue infinitésimal de $GT(\mathbb{k})$ est alors défini comme $GRT(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^\times \ltimes GRT_1(\mathbb{k})$. Plus généralement, la même formule donne une action à droite de $GRT_1(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$: si $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$ et $f \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_0(\mathbb{k}) = GRT_1(\mathbb{k})$, on a $\Phi \cdot f \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$. De plus, cette action est libre et transitive d'après [Dri91, proposition 5.5].

Le lien entre les groupes $GRT_1(\mathbb{k})$ et $GT_1(\mathbb{k})$ est donné par leur action commune sur les associateurs. On a en effet une action à gauche $(f, \Phi) \mapsto f \cdot \Phi$ de $GT_1(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$, où

$$(f \cdot \Phi)(x, y) = f(\Phi(x, y) \exp(x)\Phi(x, y)^{-1}, \exp(y))\Phi(x, y).$$

Comme cette action est également libre et transitive d'après [Dri91, proposition 5.1] et que les deux actions commutent, à tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_\lambda(\mathbb{k})$ est associé un isomorphisme $\iota_\Phi : GRT_1(\mathbb{k}) \rightarrow GT_1(\mathbb{k})$ défini par $\Phi \cdot f = \iota_\Phi(f) \cdot \Phi$ pour tout $f \in GRT_1(\mathbb{k})$.

Le groupe $GT_1(\mathbb{k})$ agit à droite sur $B_n(\mathbb{k})$ par les formules $\sigma_1 \mapsto \sigma_1, \sigma_r \mapsto f(\delta_r, \sigma_r^2)^{-1} \sigma_r f(\delta_r, \sigma_r^2)$ pour $f \in GT_1(\mathbb{k})$. De plus, pour tous $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_1(\mathbb{k})$, $\sigma \in B_n$ et $f \in GT_1(\mathbb{k})$, on a $\widetilde{\Phi}(\sigma \cdot f) = (\widetilde{f \cdot \Phi})(\sigma)$. En effet, il suffit de vérifier cette égalité sur les générateurs d'Artin parce que $GT_1(\mathbb{k})$ agit sur $B_n(\mathbb{k})$ par automorphismes de groupe ; or $(\widetilde{f \cdot \Phi})(\sigma_r) = Q \widetilde{\Phi}(\sigma_r) Q^{-1}$ avec Q égal à

$$f(\Phi(t_{r,r+1}, Y_r) \exp(t_{r,r+1})\Phi(Y_r, t_{r,r+1}), \exp Y_r) = f(\widetilde{\Phi}(\sigma_r^2), \widetilde{\Phi}(\delta_r)).$$

On en déduit l'égalité voulue.

2.5 Un résultat de densité

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Si L est un corps topologique et $L' \subset L$ est un sous-corps topologique dense de L , alors $GT_1(L')$ est dense dans $GT_1(L)$.*

Pour démontrer le théorème, on choisit $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_1(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_1(L') \subset \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_1(L)$ et on utilise l'isomorphisme ι_Φ entre $GRT_1(L)$ et $GT_1(L)$. Il envoie $GRT_1(L')$ sur $GT_1(L')$. Ces isomorphismes respectent la topologie, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 1. *Soit \mathbb{k} un corps topologique. La bijection ι_Φ associée à $\Phi \in \mathbb{A}\mathbb{s}\mathbb{s}_1(\mathbb{k})$ entre $GRT_1(\mathbb{k})$ et $GT_1(\mathbb{k})$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $g \in GRT_1(\mathbb{k})$ et $f = \iota_\Phi(g) \in GT_1(\mathbb{k})$. Par définition, la relation entre f et g est donnée par les formules

$$\Phi'(x, y) = \Phi(g(x, y) x g(x, y)^{-1}, y) g(x, y), \tag{5}$$

$$\Phi'(x, y) = f(\Phi(x, y) \exp(x) \Phi(x, y)^{-1}, \exp(y)) \Phi(x, y). \tag{6}$$

Il est clair que la relation (5) associe continument, à tout élément $g \in \mathcal{M}(\mathbb{k})$, un élément $\Phi' \in \mathcal{M}(\mathbb{k})$. Posant $f = \exp \circ F$ avec $F \in \mathcal{L}(\mathbb{k})$, la relation (6) dit qu'alors

$$F(\log(\Phi(x, y) \exp(x) \Phi(x, y)^{-1}), y) = \log(\Phi'(x, y) \Phi(x, y)^{-1}).$$

Or il existe $P \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$, $\omega(P) \geq 2$, tel que $\log(\Phi(x, y) \exp(x) \Phi(x, y)^{-1})$ vaille $x + P$. Comme l'application $\Phi' \mapsto \log(\Phi' \Phi^{-1})$ est continue, il suffit de montrer que l'endomorphisme continu Δ du \mathbb{k} -espace vectoriel topologique $\mathcal{A}_+(\mathbb{k})$ défini par $F(x, y) \mapsto F(x + P, y)$ admet une réciproque continue. Or, pour tout $F \in \mathcal{A}_+(\mathbb{k})$, $(\Delta - \text{Id})(F)$ est d'ordre strictement supérieur à $\omega(F)$, ainsi l'ordre de $(\Delta - \text{Id})^n(F)$ est au moins $\omega(F) + n$ et $\Delta^{-1} = \sum (\Delta - \text{Id})^n (-1)^n$ est continu pour la topologie de la convergence simple puisque chaque $(\Delta - \text{Id})^n$ l'est. La continuité du morphisme inverse $GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow GRT_1(\mathbb{k})$ se montre de même. \square

Il suffit donc de montrer que $GRT_1(L')$ est dense dans $GRT_1(L)$. Or, pour tout corps \mathbb{k} , $GRT_1(\mathbb{k})$ est naturellement défini comme l'ensemble des \mathbb{k} -points d'un \mathbb{Q} -schéma en groupe pro-unipotent GRT_1 dont l'algèbre de Lie \mathfrak{grt}_1 est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{L} définie par des équations linéaires (cf. [Dri91, p. 851 et proposition 5.7]) à coefficients rationnels. On en déduit $\mathfrak{grt}_1(L) = \mathfrak{grt}_1(L') \otimes_{L'} L$, et $\mathfrak{grt}_1(L')$ est dense dans $\mathfrak{grt}_1(L)$. Pour avoir la conclusion du théorème, il suffit de montrer que l'application exponentielle de cette algèbre de Lie dans son groupe de Lie est continue. Pour tout $f \in \mathcal{A}_+(\mathbb{k})$, notons D_f l'unique dérivation continue de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui vérifie $D_f(x) = [f, x]$ et $D_f(y) = 0$, et s_f l'endomorphisme linéaire de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui à $g \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$ associe $s_f(g) = gf + D_f(g)$. On a $\omega(s_f(g)) > \omega(g)$. Comme GRT_1 est pro-unipotent en tant que schéma en groupe sur \mathbb{Q} , l'application exponentielle associée est surjective. L'image de $f \in \mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ dans $GRT_1(\mathbb{k})$ est donnée par $\exp(s_f)(1)$ (cf. [Dri91], ou [Rac00, proposition 2.9] pour plus de détails), on en déduit que cette application est continue. Le théorème est ainsi démontré.

2.6 Caractères de Soulé

Pour l un nombre premier, notons μ_{l^∞} la limite inductive sur n des μ_{l^n} et Γ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$, muni de sa topologie naturelle de groupe profini.

Soulé a défini une classe de caractères de Γ à valeurs dans le groupe additif \mathbb{Z}_l , dont nous rappelons brièvement la construction. Soit $m \geq 3$ impair. Pour tout $n \geq 1$ (respectivement $n \geq 2$ si $l = 2$) on note ζ_n une racine primitive l^n -ième de 1, et

$$\epsilon_{m,n} = \prod_a (\zeta_n^a - 1)^{[a^{m-1}]}$$

où a parcourt les entiers strictement compris entre 0 et l^n qui sont premiers à l et $[a^{m-1}]$ désigne le reste de la division euclidienne de a^{m-1} par l^n . Comme $m - 1$ est pair, $\epsilon_{m,n}$ est totalement réel et totalement positif. Pour $u, v > 0$ on note $u^v = \exp(v \log u)$. Il existe alors, pour tout $\sigma \in \Gamma$, un

unique $\kappa_m(\sigma) \in \mathbb{Z}_l$ tel que, pour tout $n \geq 1$ ($n \geq 2$ si $l = 2$),

$$\sigma(\epsilon_{m,n}^{1/l^n}) = \sigma(\epsilon_{m,n})^{1/l^n} \zeta_n^{\kappa_m(\sigma)}.$$

Ces applications κ_m sont les caractères de Soulé.

Si $l = 2$, $\epsilon_{3,2} = \epsilon_{3,3} = \epsilon_{5,3} = \epsilon_{5,2} = 2$, donc $\kappa_3(\sigma)$ et $\kappa_5(\sigma)$ sont congrus modulo 8. D'autre part, le fait que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\mu_8)$ implique que $\kappa_3(\sigma)$ est divisible par 2. Si $l = 3$ on a $\epsilon_{3,1} = \epsilon_{5,1} = (j - 1)(j^2 - 1) = 3$, donc de même $\kappa_3(\sigma)$ est congru à $\kappa_5(\sigma)$ modulo 3.

On utilisera également la notation, à l fixé, $\kappa_m^*(\sigma) = \kappa_m(\sigma)/(l^{m-1} - 1)$. Le principal résultat dont nous aurons besoin concernant ces caractères est le suivant :

PROPOSITION 1. *Pour tout nombre premier l , $\kappa_3 \neq 0$.*

Démonstration. Si l est impair, cela découle du résultat général de Soulé sur la non trivialité des κ_m (cf. [Sou81, Sou87], voir également [IS87]). Le cas $l = 2$ est élémentaire : il suffit en effet de montrer que $X^4 - 2$ n'admet pas de racine dans $L = \mathbb{Q}(\mu_{2^\infty})$, extension galoisienne abélienne de \mathbb{Q} . C'est le cas parce que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, extension non abélienne de \mathbb{Q} , serait autrement incluse dans L . \square

On a un morphisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow GT(\mathbb{Q}_l)$ (cf. [Dri91, Iha91]). Son composé avec le morphisme naturel $GT(\mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times$ est la composante en l du caractère cyclotomique. On en déduit un morphisme m du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ vers $GT_1(\mathbb{Q}_l)$. Pour alléger les notations, pour $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ nous noterons $\sigma.\Phi$, $\chi(\sigma)$ pour $m(\sigma).\Phi$, $\chi \circ m(\sigma)$.

2.7 $GT_1(\mathbb{k})$ et $GRT_1(\mathbb{k})$ en degré 3

On note $w_x = [x, [x, y]]$ et $w_y = [y, [y, x]]$. Soient $\lambda \in \mathbb{k}^\times$, $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$, $f \in GRT_1(\mathbb{k})$, $F \in GT_1(\mathbb{k})$. Pour $a, b \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$, on note $a \equiv b$ si $\omega(a - b) \geq 4$. On sait qu'existe $\mathfrak{c} \in \mathbb{k}$ tel que $\Phi \equiv 1 + (\lambda^2/24)[x, y] + \mathfrak{c}(w_x - w_y)$. Comme $GRT_1(\mathbb{k}) = \text{Ass}_0(\mathbb{k})$, il existe $z \in \mathbb{k}$ tel que $f \equiv 1 + z(w_x - w_y)$. Comme $F \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$, $F = \exp \psi$ pour un certain $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{k})$. On a donc $\psi \equiv a_1x + a_2y + a_3[x, y] + a_4w_x + a_5w_y$ pour certaines valeurs des $a_i \in \mathbb{k}$. L'équation $F(u, v)F(v, u) = 1$ implique $a_2 = -a_1$ en degré 1, puis $a_1 = 0$ en degré 2, l'équation de l'hexagone en degré 2 implique $a_3 = 0$, et enfin la première équation en degré 3 implique $a_5 + a_4 = 0$: il existe donc $z' \in \mathbb{k}$ tel que $F \equiv 1 + z'(w_x - w_y)$. Les valeurs $z, \lambda, \mathfrak{c}, z'$ étant fixées,

$$(\Phi.f)(x, y) = \Phi(fx f^{-1}, y)f \equiv 1 + \frac{\lambda^2}{24}[x, y] + (\mathfrak{c} + z)(w_x - w_y),$$

$$(F.\Phi)(x, y) = F(\Phi e^x \Phi^{-1}, e^y)\Phi \equiv 1 + \frac{\lambda^2}{24}[x, y] + (\mathfrak{c} + z')(w_x - w_y).$$

L'isomorphisme ι_Φ associé à Φ induit donc toujours l'identité en degré 3 (c'est également une conséquence élémentaire du théorème de Drinfeld selon lequel le gradué de l'algèbre de Lie de $GT_1(\mathbb{k})$ est isomorphe à $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$). D'autre part, $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre de Lie graduée qui contient l'élément $w_x - w_y$ donc, pour tout $z \in \mathbb{k}$, $GRT_1(\mathbb{k})$ contient l'exponentielle (au sens du groupe) de $z(w_x - w_y)$, qui est congrue à $1 + z(w_x - w_y)$. En particulier, on déduit des formules précédentes et de l'existence, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, d'un associateur $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ le lemme suivant.

LEMME 2. *Pour tous $\mathfrak{c}, \lambda \in \mathbb{k}$, il existe $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ tel que $\mathfrak{c}(\Phi) = \mathfrak{c}$. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ il existe $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ tel que $\mathfrak{c}(\Phi) \neq 0$.*

Nous allons également déterminer le terme de degré 3 pour l'image du groupe de Galois. On a un morphisme du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ vers le groupe de Grothendieck–Teichmüller pro- l , qui envoie un élément σ du groupe de Galois sur un élément f^σ du complété pro- l F_l du groupe libre en deux générateurs u, v . Il est classique que F_l se plonge dans $\mathcal{H}(\mathbb{Q}_l)$ par l'application $u \mapsto e^x, v \mapsto e^y$. L'image de f^σ par ce morphisme sera notée Df^σ . On a $Df^\sigma \in GT_1(\mathbb{Q}_l)$.

On peut également plonger F_l dans $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_l)$ en envoyant u et v respectivement sur $1+x$ et $1+y$. On note $If^\sigma \in \mathcal{A}(\mathbb{Z}_l)$ l'image de f^σ par ce morphisme. On a immédiatement, dans $\mathcal{A}(\mathbb{Q}_l)$,

$$Df^\sigma(\log(1+x), \log(1+y)) = If^\sigma(x, y), \quad If^\sigma(e^x - 1, e^y - 1) = Df^\sigma(x, y).$$

Introduisons alors, suivant Ihara (cf. [Iha91]), la décomposition naturelle $\mathcal{A}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} \oplus \mathcal{A}(\mathbb{k})x \oplus \mathcal{A}(\mathbb{k})y$, notons p_x la projection sur les deux premières composante, et π_{ab} la restriction du morphisme d'abélianisation $\mathcal{A}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}[x, y]$ à $\mathbb{k} \oplus \mathcal{A}(\mathbb{k})x$. Ihara montre que

$$\psi_{ab}^\sigma = \pi_{ab} \circ p_x(If^\sigma) = \exp\left(\sum_{\substack{m \geq 3 \\ m \text{ impair}}} \frac{\kappa_m^*(\sigma)}{m!} ((X+Y)^m - X^m - Y^m)\right)$$

avec $X = \log(1+x)$, $Y = \log(1+y)$. En particulier, $\psi_{ab}^\sigma \equiv 1 + \kappa_3^*(\sigma)(yx^2 + y^2x)/2$. Alors, si $Df^\sigma \equiv 1 + \alpha(w_x - w_y)$, on a $If^\sigma \equiv Df^\sigma$ et, de $\pi_{ab} \circ p_x(w_x) = -x^2y$ et $\pi_{ab} \circ p_x(w_y) = y^2x$, on déduit $\psi_{ab}^\sigma = 1 - \alpha(y^2x + yx^2)$ et $\alpha = -\kappa_3^*(\sigma)/2$. On a donc montré

LEMME 3. L'image de $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ dans $GT_1(\mathbb{Q}_l)$ vaut

$$1 - \frac{\kappa_3^*(\sigma)}{2}([x, [x, y]] - [y, [y, x]])$$

plus des termes d'ordre supérieurs. Pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\text{ss}_\lambda(\mathbb{Q}_l)$,

$$c(\sigma.\Phi) = c(\Phi) - \frac{\kappa_3^*(\sigma)}{2}.$$

3. Action de $GT_1(\mathbb{k})$ sur les représentations de B_n

3.1 Généralités

Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique 0, $A = \mathbb{k}[[h]]$, $K = \mathbb{k}((h))$. Soit

$$V_N(\mathbb{k}) = \{R \in \text{Hom}(B_n, GL_N(A)) \mid R(C^r P_n) \subset 1 + h^{r+1}M_N(A)\}.$$

On a $V_N(\mathbb{k}) \subset \text{Hom}(B_n, GL_N(A)) \subset \text{Hom}(B_n, GL_N(K))$. Tout $R \in V_N(\mathbb{k})$ se prolonge naturellement en $\tilde{R} \in \text{Hom}(B_n(\mathbb{k}), GL_N(A))$. On en déduit une action à gauche de $GT_1(\mathbb{k})$ sur $V_N(\mathbb{k})$: à $R \in V_N(\mathbb{k})$ et $f \in GT_1(\mathbb{k})$ est associé $f.R = S$ définie par $S(\sigma) = \tilde{R}(\sigma.f)$ pour tous $\sigma \in B_n$. Soit maintenant $\mathcal{V}(\mathbb{k}) = \text{Hom}(\mathfrak{B}_n(\mathbb{k}), M_N(\mathbb{k}))$ et $\Phi \in \mathbb{A}\text{ss}_\lambda(\mathbb{k})$. A tout $\rho \in \mathcal{V}(\mathbb{k})$ on associe $\bar{\rho} \in \text{Hom}(\widehat{\mathfrak{B}}_n(\mathbb{k}), M_N(A))$ définie par $\bar{\rho}(t_{ij}) = ht_{ij}$, $\bar{\rho}(s) = \rho(s)$ pour $s \in \mathfrak{S}_n$, et $\widehat{\Phi}(\rho) = \bar{\rho} \circ \tilde{\Phi} \in \text{Hom}(B_n, GL_N(A))$. On vérifie aisément $\widehat{\Phi}(\rho) \in V_N(\mathbb{k})$. Les propriétés de théorie des représentations du foncteur $\widehat{\Phi}$ ont été étudiées par l'auteur dans [Mar05].

Soit maintenant $f \in GT_1(\mathbb{k})$. On a, pour tout $\sigma \in B_n$,

$$\begin{aligned} [f.\widehat{\Phi}(\rho)](\sigma) &= \widehat{\Phi}(\rho)(\sigma.f) = \bar{\rho} \circ \tilde{\Phi}(\sigma.f) \\ &= \bar{\rho} \circ \widehat{(f.\Phi)}(\sigma) = \widehat{(f.\Phi)}(\rho)(\sigma) \\ &= \widehat{\Phi.\iota_{\Phi}^{-1}(f)}(\rho)(\sigma) \end{aligned}$$

d'où $f.\widehat{\Phi}(\rho) = \widehat{f.\Phi}(\rho) = \widehat{\Phi.\iota_{\Phi}^{-1}(f)}(\rho)$. On s'intéresse ici à une classe particulière de représentations de B_n . Nous dirons d'une représentation $R : B_n \rightarrow GL_N(A)$ qu'elle est (absolument) irréductible s'il en est ainsi dans $GL_N(K)$. Deux telles représentations R et R' seront dites isomorphes si elles le sont dans $GL_N(K)$.

DÉFINITION 1. Une représentation absolument irréductible $R \in V_N(\mathbb{k})$ est dite *GT-rigide* si $g.R$ est isomorphe à R pour tout $g \in GT_1(\mathbb{k})$.

Comme l'action de $GT_1(\mathbb{k})$ sur $V_N(\mathbb{k})$ commute à l'action par conjugaison à droite de $PGL_N(K)$ sur $\text{Hom}(B_n, GL_N(K))$, on associe à tout $R \in V_N(\mathbb{k})$ GT-rigide une représentation projective $Q_R : GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow PGL_N(K)$ par $g.R = Q_R(g)^{-1}RQ_R(g) = R.Q_R(g)$.

Soit $\rho : \mathfrak{B}_n(\mathbb{k}) \rightarrow M_N(\mathbb{k})$ une représentation absolument irréductible de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$. D'après [Mar05] la représentation $\widehat{\Phi}(\rho)$ associée est absolument irréductible pour tout $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$, pourvu que $\lambda \in \mathbb{k}^\times$. Si $\widehat{\Phi}(\rho)$ est GT-rigide pour un tel Φ , il en sera de même pour tous. Par abus, nous dirons alors que ρ est GT-rigide.

D'autre part, si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ est GT-rigide, cette représentation s'étend en une représentation de $GT_1(L)$ dans $PGL_N(L((h)))$ pour tout surcorps L de \mathbb{k} . Enfin, pour toutes représentations $R_1 \in V_{N_1}(\mathbb{k})$, $R_2 \in V_{N_2}(\mathbb{k})$, $g \in GT_1(\mathbb{k})$ et $\sigma \in B_n$, on a $R_1 \otimes R_2 \in V_{N_1 N_2}(\mathbb{k})$ et $(g.(R_1 \otimes R_2))(\sigma) = \widetilde{R_1 \otimes R_2}(\sigma.g) = \widetilde{R_1}(\sigma.g) \otimes \widetilde{R_2}(\sigma.g)$ donc $g.(R_1 \otimes R_2) = (g.R_1) \otimes (g.R_2)$. Si R_1 et R_2 sont GT-rigides, on en déduit que $R_1 \otimes R_2$ est conjuguée à $g.(R_1 \otimes R_2)$ par $Q_{R_1} \otimes Q_{R_2}$.

3.2 Agrégeance et caractères

3.2.1 Action de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$. On identifie $\mathbb{G}_m(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^\times$ à un sous-groupe des \mathbb{k} -automorphismes de $K = \mathbb{k}((h))$, en faisant agir $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ sur $f(h) \in K$ par $f \mapsto f^\alpha$ avec $f^\alpha(h) = f(\alpha h)$. L'anneau $A \subset K$ est laissé stable. Si \mathbb{k} est un corps topologique, cette action est continue. Elle s'étend naturellement à $GL_N(K)$ et $PGL_N(K)$, donc également à $\text{Hom}(G, GL_N(K))$ et $\text{Hom}(G, PGL_N(K))$ pour tout groupe G . Soit $R \in V_N(\mathbb{k})$. Il existe *a priori* deux façons de faire agir $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ sur \widetilde{R} , soit par \widetilde{R}^α , soit par $(\widetilde{R})^\alpha$, c'est-à-dire par l'action de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ soit sur $\text{Hom}(B_n, GL_N(A))$, soit sur $\text{Hom}(B_n(\mathbb{k}), GL_N(K))$. Comme l'action de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ sur K est continue pour la topologie h -adique (ce qui revient à munir \mathbb{k} de la topologie discrète), on vérifie facilement que $\widetilde{R}^\alpha = (\widetilde{R})^\alpha$, donc que l'action de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ est bien définie. De plus, $V_N(\mathbb{k})$ est stable sous l'action de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$. On en déduit que l'action de $GT_1(\mathbb{k})$ sur $V_N(\mathbb{k})$ commute à celle de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$: pour tous $g \in GT_1(\mathbb{k})$, $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})$, $g.R^\alpha = (g.R)^\alpha$. En particulier, si R est GT-rigide, R^α l'est également pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ et $Q_{R^\alpha} = (Q_R)^\alpha$. D'autre part, $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ agit par automorphismes sur $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$: à $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ on associe l'unique automorphisme d'algèbre de Hopf tel que $t_{ij} \mapsto \alpha t_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et qui laisse $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ invariant. On en déduit une action $\rho \mapsto \rho^\alpha$ sur $\mathcal{V}_N(\mathbb{k})$; elle vérifie $\widehat{\Phi}(\rho^\alpha) = \widehat{\Phi}(\rho)^\alpha$ pour tout $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$.

3.2.2 Représentations agrégeantes. Soit \mathcal{D}_n la sous-algèbre de Lie commutative de \mathcal{T}_n engendrée par Y_2, \dots, Y_n . Suivant [Mar05] on appelle agrégeante toute $\rho : \mathfrak{B}_n(\mathbb{k}) \rightarrow M_N(\mathbb{k})$ telle que $\rho(\mathcal{UD}_n)$ égale la sous-algèbre de $M_N(\mathbb{k})$ formée des matrices diagonales. Pour une représentation agrégeante, l'irréductibilité équivaut à l'absolue irréductibilité (cf. [Mar04, corollaire 2 de la proposition 3]). De plus, si $\rho_1 \in \mathcal{V}_{N_1}(\mathbb{k})$ et $\rho_2 \in \mathcal{V}_{N_2}(\mathbb{k})$ sont deux représentations agrégeantes et (absolument) irréductibles, il en est de même de $\rho_1^{\alpha_1} \otimes \rho_2^{\alpha_2}$ pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})^2$ générique d'après [Mar04].

Soit D_n le sous-groupe abélien libre de P_n engendré par $\delta_2, \dots, \delta_n$. Supposons que $R \in V_N(\mathbb{k})$ est GT-rigide et telle que $R(\delta_2), \dots, R(\delta_n)$ engendre la sous-algèbre de $M_N(K)$ formée des matrices diagonales. Cette dernière condition est en particulier satisfaite si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour un certain $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$, $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ et $\rho \in \mathcal{V}_N(\mathbb{k})$ agrégeante, puisqu'alors $R(\delta_r) = \exp(\lambda h Y_r)$ pour $r \in [2, n]$. D'autre part, pour tout $r \in [2, n]$ et pour tout $g \in GT_1(\mathbb{k})$, $\delta_r.g = \delta_r$. Cette égalité peut se démontrer directement à partir des équations de définition de $GT_1(\mathbb{k})$, ou se déduire de l'existence d'un $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$: on a $\widetilde{\Phi}(\delta_r.g) = (\widetilde{f.\Phi})(\delta_r) = \widetilde{\Phi}(\delta_r)$, donc $\delta_r.g = \delta_r$. On en déduit $(g.R)(\delta_r) = R(\delta_r)$, donc tout $Q_R(g)$ commute à $R(\delta_r)$ pour tout $r \in [2, n]$, et appartient ainsi à l'image dans $PGL_N(K)$ des matrices diagonales inversibles de $M_N(K)$.

En particulier, l'image de $GT_1(\mathbb{k})$ dans $PGL_N(K)$ est commutative donc, si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$, Q_R ne dépend pas du choix de $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$. En effet, si l'on pose $\Phi' = \tau.\Phi$ pour un certain $\tau \in GT_1(\mathbb{k})$ et $R' = \widehat{\Phi}'(\rho)$, pour tout $g \in GT_1(\mathbb{k})$ on a alors $Q_{R'}(g) = Q_R(\tau^{-1}g\tau) = Q_R(g)$.

3.2.3 Propriétés des caractères. Le morphisme de $(K^\times)^N$ vers $\mathbb{G}_m(K)^{N-1}$ qui est défini par $(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_2/x_1, x_3/x_2, \dots, x_N/x_{N-1})$ a pour noyau K^\times et induit un isomorphisme de $(K^\times)^N/K^\times$ sur $\mathbb{G}_m(K)^{N-1}$. On en déduit $N - 1$ caractères $GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{G}_m(K)$ de $GT_1(\mathbb{k})$ que l'on numérote $Q_{R,2}, \dots, Q_{R,N}$ suivant l'ordre des vecteurs de base de K^N . Naturellement et par convention, on pose $Q_{R,1} = 1$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k})$ on a $Q_{R^\alpha,i} = (Q_{R,i})^\alpha$. Si ces $N - 1$ caractères sont distincts et non triviaux, nous dirons que R est *sans résonances*. Cette dernière propriété ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de base que l'on a choisi.

De plus, comme R est absolument irréductible, il existe $\sigma \in \mathbb{k}B_n$ tel que $R(\sigma) \in M_N(A)$ ait tous ses coefficients non nuls. Pour tout $g \in GT_1(\mathbb{k})$, on a alors $Q_R(g)(g.R)(\sigma) = R(\sigma)Q_R(g)$. Si l'on note sous forme matricielle $R(\sigma) = (x_{ij})$, $(g.R)(\sigma) = (y_{ij}(g))$ pour $1 \leq i, j \leq N$, $Q_R(g) = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ avec $a_i = Q_{R,i}(g)$, cette équation est équivalente à $x_{ij}a_j = a_i y_{i,j}(g)$ pour tous i, j . En particulier, $Q_{R,j}(g) = y_{1,j}(g)/x_{1,j}$ pour tout j . Si \mathbb{k} est un corps topologique on en déduit que chaque $Q_{R,i}$ est continu, chaque $y_{1,j}$ étant une fonction continue de $g \in GT_1(\mathbb{k})$.

Pour $R \in V_N(\mathbb{k})$, notons $\overline{R} \in \text{Hom}(B_n, GL_N(\mathbb{k}))$ la réduction de R modulo h . Comme $R(P_n) \subset 1 + hM_N(A)$, \overline{R} se factorise par \mathfrak{S}_n . C'est la représentation du groupe symétrique associée à R . Si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$, \overline{R} s'identifie à la restriction de ρ à \mathfrak{S}_n . Pour la représentation R choisie ici, si \overline{R} est (absolument) irréductible on peut choisir $\sigma \in \mathbb{k}B_n$ tel que $\overline{R}(\sigma)$ ait tous ses coefficients non nuls, donc chaque x_{1j} est inversible dans A . On en déduit que chaque $Q_{R,i}$ est alors à valeur dans $\mathbb{G}_m(A)$. Nous avons montré dans [Mar01] que cette situation (i.e. que \overline{R} est absolument irréductible) a lieu essentiellement lorsque R se factorise par l'algèbre d'Iwahori–Hecke (cf. [Mar01]).

De façon générale, si l'on suppose $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour un certain $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$ et ρ absolument irréductible et agrégeante, les caractères sont toujours à valeurs dans $A_1 = \exp A_0$, où $A_0 = hA$ et $A_1 = 1 + hA$. En effet, il existe alors (voir [Mar05, §3.1.2]) un élément $\sigma \in KB_n$ indépendant du choix de $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$ tel que $\widehat{\Phi}(\rho)(\sigma) = m_0 + hm$ avec $m \in M_N(A)$ et m_0 l'élément de $M_N(\mathbb{k})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On en déduit $Q_{R,j}(g) \in A_1$ pour tout $g \in GT_1(\mathbb{k})$.

Sous certaines conditions (d'« unitarité ») on peut alors montrer que le logarithme de ces caractères est une série formelle *impaire* en h sans terme linéaire (voir en §4.5).

3.3 Continuité

Nous démontrons que les représentations projectives $Q_R : GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow K^\times$ sont continues si \mathbb{k} est un corps topologique. Cela découle de considérations générales que nous rappelons ici par manque de références adéquates.

Si K est un corps topologique et \mathcal{A} une K -algèbre à unité de type fini (munie de la topologie induite), l'ensemble de morphismes d'algèbres à unité $\text{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ est naturellement muni d'une topologie. Elle est telle que si g_1, \dots, g_r forment un système quelconque de générateurs de \mathcal{A} , l'application $R \mapsto (R(g_i))_{i=1, \dots, r} \in M_N(K)^r$ est un homéomorphisme de \mathcal{A} sur son image. Pour $R \in \text{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ on note $\mathcal{O}(R)$ son image sous l'action par conjugaison de $PGL_N(K)$. On a alors la :

PROPOSITION 2. *Si $R \in \text{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ est absolument irréductible, alors $P \mapsto P.R$ est un homéomorphisme de $PGL_N(K)$ sur $\mathcal{O}(R)$.*

Démonstration. La bijectivité découle du lemme de Schur. Il s'agit de montrer que la réciproque est continue. D'après le théorème de Burnside $R(\mathcal{A}) = M_N(K)$ donc quitte à quotienter par $\text{Ker } R$ on peut supposer R bijective. On note (E_{ij}) pour $1 \leq i, j \leq N$ la famille des matrices élémentaires de $M_N(K)$ et $g_{ij} = R^{-1}(E_{ij})$. On plonge $\text{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ dans $M_N^*(K)^{N^2}$ (de façon $PGL_N(K)$ -équivariante) suivant ces générateurs, où l'on note $M_N^*(K) = M_N(K) \setminus \{0\}$. Soit $(A^{u,v})$

pour $1 \leq u, v \leq N$ un élément de $M_N^*(K)^{N^2}$ avec $A^{u,v}$ matrice de terme général $(a_{i,j}^{u,v})$. Soit $P \in GL_N(K)$, $Q = P^{-1}$ de terme général $(p_{i,j}), (q_{i,j})$. Si, pour tous u, v , on a $PE_{u,v}Q = A^{u,v}$, c'est-à-dire $p_{iu}q_{vj} = a_{ij}^{uv}$ pour tous i, j, u, v , il existe i_0, j_0, u_0, v_0 tels que $\beta = a_{i_0j_0}^{u_0v_0} \neq 0$, d'où $p_{i_0u_0} \neq 0, q_{v_0j_0} \neq 0$. La restriction de l'inverse de $P \mapsto P.R$ à l'ouvert de $\mathcal{O}(R)$ défini par $a_{i_0j_0}^{u_0v_0} \neq 0$ est alors donné par la classe dans $PGL_N(K)$ de $(a_{i,j}^{uv})_{i,u}$ puisqu'alors $a_{i,j}^{uv}/\beta = p_{iu}/p_{i_0u_0}$, et est donc continue. \square

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE. Si R est une représentation GT-rigide de $B_n, Q_R : GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow PGL_N(K)$ est continue.

3.4 Trivialité

Nous donnons une caractérisation des représentations GT-rigides R pour lesquelles Q_R est triviale.

PROPOSITION 3. Soit ρ une représentation GT-rigide de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k}), n \geq 3, \Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k}), \lambda \neq 0, R = \widehat{\Phi}(\rho)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Q_R est triviale ;
- (ii) $\rho([t_{12}, t_{23}]) = 0$;
- (iii) $R([P_n, P_n]) = \{1\}$.

Si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}_l$, ces conditions sont encore équivalentes à

- (iv) $\forall \sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})), Q_R(\sigma) = 1$.

Démonstration. L'équivalence (ii) \Leftrightarrow (iii) est démontrée dans [Mar05, lemme 5]. (ii) \Rightarrow (i) découle du fait qu'alors $\widehat{\Phi}'(\rho) = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour tout $\Phi' \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$, parce que l'image par ρ de $\mathcal{T}_n(\mathbb{k})$ est alors commutative. On montre (i) \Rightarrow (ii) à partir du calcul explicite (cf. [Mar05, proposition 3])

$$\widehat{\Phi}_2(\rho)(\sigma_2) - \widehat{\Phi}_1(\rho)(\sigma_2) = \rho(s_2)(\mathfrak{c}(\Phi_1) - \mathfrak{c}(\Phi_2))\rho([t_{23}, [t_{23}, t_{12}]])$$

plus des termes d'ordres supérieurs, pour tous $\Phi_1, \Phi_2 \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$. D'après le lemme 2 on peut en effet supposer $\mathfrak{c}(\Phi) \neq 0$. Alors $\overline{\Phi} \in \text{Ass}_\lambda(k)$ et $\mathfrak{c}(\overline{\Phi}) = -\mathfrak{c}(\Phi) \neq \mathfrak{c}(\Phi)$. Si Q_R est triviale, $\widehat{\Phi}(\rho)(\sigma_2) = \overline{\widehat{\Phi}}(\rho)(\sigma_2)$. On a alors $\rho([t_{23}, [t_{23}, t_{12}]]) = 0$. Comme la restriction de ρ à $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_3(\mathbb{k})$ est \mathfrak{S}_3 -équivariante on a aussi $\rho([t_{12}, [t_{12}, t_{23}]]) = 0$. Soit \mathcal{T}' la sous-algèbre de Lie de \mathcal{T}_3 engendrée par t_{12} et t_{23} . On a $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}' \oplus \mathbb{k}T$ avec $T = t_{12} + t_{13} + t_{23}, \mathbb{k}T = Z(\mathcal{T}_3), \mathcal{T}' \simeq \mathcal{T}_3/Z(\mathcal{T}_3)$. La restriction de ρ à \mathcal{T}' annule ainsi $[\mathcal{T}', [\mathcal{T}', \mathcal{T}']]$, donc se factorise par une algèbre de Lie nilpotente, donc résoluble. La restriction de ρ à \mathcal{T}_3 , donc à $\mathcal{T}' \simeq \mathcal{T}_3/Z(\mathcal{T}_3)$, est semi-simple (cf. [Mar05, 5.2, lemme 6]). On en déduit que la restriction de ρ à \mathcal{T}' est commutative (cf. [Bou, ch. I, § 5, no. 3, p. 65, corollaire 1 du théorème 1]), et en particulier $\rho([t_{12}, t_{23}]) = 0$. Enfin, si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}_l$ on a naturellement (i) \Rightarrow (iv), et la démonstration de (iv) \Rightarrow (ii) est analogue à celle de (i) \Rightarrow (ii) car pour tout $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ il existe $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ tel que $\mathfrak{c}(\sigma.\Phi) \neq \mathfrak{c}(\Phi)$ d'après le lemme 3 et la proposition 1. \square

Lorsque \mathbb{k} est un corps topologique et la représentation GT-rigide considérée est agrégante, la représentation projective de $GT_1(\mathbb{k})$ se décompose en caractères continus $\chi : GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}((h))^\times$ qui ont les propriétés suivantes : (a) si L est un surcorps de \mathbb{k}, χ s'étend en $\tilde{\chi} : GT_1(L) \rightarrow L((h))^\times$; (b) pour toute topologie sur \mathbb{k} compatible à sa structure de corps, $\tilde{\chi}$ est continue dès que l'inclusion $\mathbb{k} \subset L$ est continue. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 4. Soit $\chi : GT_1(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}((h))^\times$ un caractère vérifiant les conditions (a) et (b), et g_0 l'unique élément de $GT_1(\mathbb{C})$ tel que $g_0.\Phi_{KZ} = \overline{\Phi}_{KZ}$. Si $\chi(g_0) \neq 1$, alors χ est non triviale sur $GT_1(\mathbb{Q})$.

Démonstration. Pour tout nombre premier l , on peut choisir un rationnel $\beta_l > 0$ tel que $\sqrt{-\beta_l} \in \mathbb{Q}_l$ (par exemple $\beta_2 = 7$ et $\beta_l = l - 1$ si $l \neq 2$). Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-\beta_l}) \subset \mathbb{C}$. Pour la topologie naturelle de \mathbb{C} , les inclusions $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$ sont des inclusions de corps topologiques. Comme $\beta_l > 0$,

L est dense dans \mathbb{C} donc $GT_1(L)$ est dense dans $GT_1(\mathbb{C})$ d'après le théorème 1 et il existe donc $g \in GT_1(L)$ tel que $\chi(g) \neq 1$ par continuité. En particulier, pour tout corps L' isomorphe à L il existe $g' \in GT_1(L')$ tel que $\chi(g') \neq 1$. Prenant pour L' l'extension de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q}_l engendrée par $\sqrt{-\beta_l}$ on en déduit qu'il existe $g' \in GT_1(\mathbb{Q}_l)$ tel que $\chi(g') \neq 1$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{Q}_l on déduit du théorème 1 qu'il existe $g'' \in GT_1(\mathbb{Q})$ tel que $\chi(g'') \neq 1$. \square

3.5 Exemples

Les exemples les plus simples de représentations GT-rigides et agrégeantes proviennent de l'algèbre d'Iwahori–Hecke de type A, et sont étudiées dans la partie suivante. Dans [Dri91, théorème A], (voir aussi [CP95, proposition 16.1.6]), Drinfeld montre que toutes les composantes (absolument) irréductibles des représentations de type Yang–Baxter de B_n sont GT-rigides. Enfin, il n'est pas difficile de montrer, en reprenant les arguments de [Mar03, proposition 4], et en utilisant le théorème 4 de [Mar03], que les représentations de l'algèbre de Birman–Wenzl–Murakami sont GT-rigides et agrégeantes (voir également [Mar04, théorème 2]). Nous déterminons en appendice la forme générale d'un élément de $GT_1(\mathbb{k})$ modulo des termes d'ordres au moins 6. Chacun de ces éléments est congru à l'un des éléments $g_{a,b}$, définis dans l'appendice, pour $a, b \in \mathbb{k}$. Cela nous permet de calculer jusqu'en degré 5 les valeurs des caractères associés à une telle représentation, si l'on sait décrire une représentation infinitésimale correspondante. Comme exemple, nous considérons la représentation irréductible de dimension 3 la plus générale de $\mathfrak{B}_3(\mathbb{k})$, définie par $s_1 = \text{diag}(1, 1, -1)$, $t_{12} = \text{diag}((3 + v)/2, (3 - v)/2, 0)$ et

$$s_2 = \frac{1}{4v} \begin{pmatrix} v - 3 & 3(v - 1) & 3(v + 1) \\ 3(v + 1) & 3 + v & -3(v + 1) \\ 2v & 2v \frac{1 - v}{1 + v} & 2v \end{pmatrix}.$$

On a $t_{13} + t_{23} = \text{diag}((3 - v)/2, (3 + v)/2, 3)$, donc cette représentation irréductible est agrégeante si $v \notin \{-3, 0, 3\}$. Elle est également GT-rigide, car elle correspond à une représentation de l'algèbre de Birman–Wenzl–Murakami, ou encore à une représentation de l'algèbre de Hecke cyclotomique du groupe de réflexions complexes G_4 (cf. [Mar05]). Soit $\Phi_0 \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$ et $R = \widehat{\Phi}(\rho)$. On en déduit deux caractères $Q_{R,2}$ et $Q_{R,3}$ tels que

$$Q_{R,2}(g_{a,b}) = 1 - \frac{1}{8}av(v^2 - 9)h^3 - \frac{9}{64}v(v^2 - 9)(v^2 + 7)bh^5 + \dots$$

et $Q_{R,3}(g_{a,b})$ vaut

$$1 + \frac{1}{16}a(v + 9)(v^2 - 9)h^3 + \frac{9}{128}(v + 5)(v^2 - 9)(v^2 - 4v + 27)b(v^2 + 7)h^5 + \dots$$

4. Algèbre de Hecke et caractères de $GT_1(\mathbb{k})$

4.1 Algèbre d'Iwahori–Hecke de type A

Soit $q \in K^\times$ un scalaire non nul. L'algèbre d'Iwahori–Hecke de type A est notée $H_n(q)$. C'est le quotient de KB_n par la relation $(\sigma_1 - q)(\sigma_1 + q^{-1}) = 0$. On a $H_n(1) = K\mathfrak{S}_n$, et $H_n(q)$ est isomorphe à $K\mathfrak{S}_n$ pour q non racine de l'unité. A toute partition α de n on associe classiquement, de façon uniforme en q , une classe d'isomorphisme de représentations de $H_n(q)$, de sorte que la partition $[n]$ corresponde à la représentation $\sigma_r \mapsto q \in GL_1(K)$ de B_n .

Nos conventions sur les diagrammes de Young sont telles que la partition $[3, 2]$ est représenté par le diagramme à deux colonnes $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$. Dans le tableau de Young standard $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ la case contenant un 2 est en colonne 1 et ligne 2. A tout tableau de Young standard T de taille n est associé un $(n - 1)$ -uplet appelé son contenu, défini comme $(l_i(T) - c_i(T))_{i=2, \dots, n}$ où $l_i(T)$ (respectivement $c_i(T)$) désigne la

ligne (respectivement la colonne) où se trouve i . Cette correspondance est injective, et identifie les tableaux standard de taille n à certains éléments de \mathbb{Z}^{n-1} . On munit \mathbb{Z}^{n-1} de l'ordre inverse de l'ordre lexicographique, et l'ensemble des tableaux standard de même taille de l'ordre induit.

On décrit maintenant des expressions matricielles de ces représentations. Soit α une partition de n ; on introduit le K -espace vectoriel de base les tableaux de Young standard de forme α . Pour $r \in [1, n - 1]$ on fait agir $\sigma_r \in B_n$ sur un tableau standard T comme suit. Si r et $r + 1$ se trouvent sur la même colonne (respectivement ligne) de T , $\sigma_r.T = qT$ (respectivement $\sigma_r.T = -q^{-1}T$). Sinon, soit T' le tableau (standard) déduit de T par transposition de r et $r + 1$ dans T . Quitte à échanger les rôles de T et T' , on peut supposer que la colonne de T où se trouve r précède celle où se trouve $r + 1$, ce qui revient à demander $T < T'$. On note d la *distance axiale* entre r et $r + 1$ dans T . Si r (respectivement $r + 1$) se trouve dans T en colonne c (respectivement c') et ligne l (respectivement l'), elle est définie par $d = l - l' + c' - c$, et est donc nécessairement positive. On demande que l'action de σ_r laisse le plan engendré par T et T' stable, et que sa restriction soit donnée sur la base (T, T') par une matrice M_d^q ne dépendant que de d et q . On appelle *modèle matriciel* de $H_n(q)$ toute collection $(M_d^q)_{d \geq 2}$ telle que la construction précédente fournisse une représentation de $H_n(q)$ de classe correspondant à la partition α , pour toute partition α et tout $n \geq 2$, ceci pour presque tout q . Il est immédiat que chaque M_d^q doit avoir pour trace $q - q^{-1}$ et déterminant -1 , et donc être de la forme

$$\begin{pmatrix} a_d & b_d \\ \frac{1 + a_d a'_d}{b_d} & a'_d \end{pmatrix}$$

avec $a_d \in K$, $b_d \in K^\times$, $a'_d = q - q^{-1} - a_d$, et $1 + a_d a'_d \neq 0$ pour q générique. On vérifie facilement que toute collection $(M_d^q)_{d \geq 2}$ définie par de tels coefficients a_d, b_d , définit bien un modèle matriciel si et seulement si $a_{d+1}(q - a_d) = a_d q^{-1}$ pour tout $d \geq 2$ avec $a_2 = -1/q(q^2 + 1)$. On en déduit les formules générales $a_d = (1 - q^2)/q(q^{2d} - 1)$, $a'_d = q^{2d-1}(q^2 - 1)/(q^{2d} - 1)$. Un modèle est donc arbitrairement déterminé par le choix d'une suite $(b_d)_{d \geq 2}$ d'éléments de K^\times . Quel que soit le choix de ces scalaires, chaque tableau standard est un vecteur propre commun des $\delta_r, r \in [2, n]$. Si le contenu de T est (c_2, \dots, c_n) , $\delta_r.T = q^{2c_r}T$.

De façon analogue, on appelle *modèle matriciel* du groupe symétrique une suite $(M_d)_{d \geq 2}$ avec $M_d \in GL_2(\mathbb{k})$ telle que la construction précédente donne, pour $q = 1$, les représentations du groupe symétrique. Deux d'entre eux nous seront utiles, le modèle semi-normal et le modèle orthonormal de Young, respectivement donnés par

$$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} -1 & d + 1 \\ d - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{d^2 - 1} \\ \sqrt{d^2 - 1} & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Représentations infinitésimales

Soit $\rho_0 : \mathfrak{S}_n \rightarrow GL_N(\mathbb{k})$ une représentation du groupe symétrique. Elle s'étend en une représentation ρ de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ par la formule $\rho(t_{ij}) = 2\rho((i \ j))$. Pour tout $\hat{\Phi} \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$, $\hat{\Phi}(\rho)(\sigma_1) = \rho(s_1) \exp(h\rho(s_1))$ est semi-simple à valeurs propres $q = e^h$ et $-q^{-1}$, donc $\hat{\Phi}(\rho)$ se factorise par $H_n(q)$ pour $q = e^h$. Si ρ_0 est absolument irréductible il en est de même de ρ et de $\hat{\Phi}(\rho)$. De plus, ρ est alors agrégante et $\hat{\Phi}(\rho)$ permet de définir des caractères de $GT_1(\mathbb{k})$.

Fixons un modèle matriciel $(M_d^1)_{d \geq 2}$ du groupe symétrique, et étendons l'action de \mathfrak{S}_n sur les tableaux standard en une action de \mathfrak{B}_n suivant la formule précédente. Si T est un tableau standard de contenu (c_2, \dots, c_n) on a $Y_r.T = 2c_r T$ pour tout $r \in [2, n]$. En particulier, si T est un tableau standard contenant r et $r + 1$ dans la même colonne (respectivement la même ligne), la droite engendrée par T est stable par Y_r et $t_{r,r+1}$. On fixe désormais $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$ et on fait agir (K -linéairement) B_n sur les tableaux standard selon $\hat{\Phi}(\rho)$. Comme Φ est l'exponentielle d'une série

de Lie Ψ sans terme linéaire, $\Phi(Y_r, t_{r,r+1})$ laisse alors T invariant donc $\sigma_r.T = s_r \exp(hs_r).T$ vaut qT (respectivement $-q^{-1}T$). Dans le cas contraire, soit T' le tableau standard déduit de T par transposition de r et $r + 1$, notons (c'_2, \dots, c'_n) son contenu et supposons $T < T'$. Le plan engendré par T et T' est stable par s_r, Y_r et Y_{r+1} , donc par σ_r . L'expression de $s_r \exp(hs_r)$ dans la base (T, T') vaut $M_d^1 \exp(hM_d^1)$, avec d la distance axiale associée au couple (T, T') . D'autre part, $Y_r + Y_{r+1}$ commute à Y_r et $t_{r,r+1}$, et $Y_r = (Y_r + Y_{r+1})/2 + (Y_r - Y_{r+1})/2$, donc $\Phi(Y_r, t_{r,r+1}) = \Phi((Y_r - Y_{r+1})/2, t_{r,r+1})$ car $\Phi = \exp \Psi$ avec $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{k})$ sans terme linéaire. Comme $t_{r,r+1}$ agit par $2M_d^1$ et $(Y_r - Y_{r+1})/2$ par la matrice diagonale η_d de coefficients $(c_r - c'_r, c_{r+1} - c'_{r+1}) = (d, -d)$, l'expression de σ_r dans la base (T, T') ne dépend que de d et q , et fournit ainsi un modèle matriciel $(M_d^q)_{d \geq 2}$ de $H_n(q)$, tel que $M_d^q \equiv M_d^1$ modulo h . En particulier, à tout $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$ est ainsi attaché un modèle $(M_d^q(\Phi))_{d \geq 2}$ et une suite de scalaires $b_d(\Phi) \in K^\times, d \geq 2$. On remarque que, comme $(M_d^1)^2 = 1$, pour tout $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$, on a $2M_d^q(\Phi) = (q - q^{-1}) + (q + q^{-1})QM_d^1Q^{-1}$ avec $Q = \Phi(2hM_d^1, h\eta_d)$. Comme nous n'utiliserons que deux modèles du groupe symétrique, nous noterons $b_d^s(\Phi)$ et $b_d^o(\Phi)$ les scalaires $b_d(\Phi)$ correspondant respectivement aux modèles semi-normal et orthogonal. Comme ces deux modèles sont conjugués par la matrice diagonale de coefficients $(\sqrt{d+1}, \sqrt{d-1})$, on en déduit que ces deux nombres sont liés par la relation $b_d^s(\Phi)\sqrt{d-1} = b_d^o(\Phi)\sqrt{d+1}$. Un calcul explicite montre d'autre part aisément que

$$\frac{d}{d+1}b_d^s(\Phi) = 1 + \frac{h^2}{6} + 16c(\Phi)dh^3 + o(h^3).$$

4.3 L'associateur KZ

Dans sa thèse [Gon98], González-Lorca a calculé $M_d^q(\Phi_{\text{KZ}})$, donc $b_d(\Phi_{\text{KZ}})$. Pour la commodité du lecteur mais aussi parce que nous aurons également besoin de connaître $b_d(\overline{\Phi}_{\text{KZ}})$, nous reprenons ici les dernières étapes de ce calcul. On a ici $\mathbb{k} = \mathbb{C}, A = \mathbb{C}[[h]], K = \mathbb{C}((h))$. On note $\hbar = h/(2i\pi)$ et l'on suppose M_d^1 donné par le modèle semi-normal. On introduit la fonction de trois variables complexes

$$\Gamma_3(a, b, c) = \frac{\Gamma(1 - 2a)\Gamma(1 + 2b)}{\Gamma(1 + b - a + \delta)\Gamma(1 + b - a - \delta)}$$

où δ désigne une racine carrée de $a^2 + b^2 + 2c$ et Γ est la fonction Gamma d'Euler. Comme $\Gamma(1 + z)$ est analytique au voisinage de 0, on peut définir $\Gamma_3(\alpha, \beta, \gamma) \in K$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in hA$ et $F(a, b) = \Gamma_3(\hbar a, \hbar b, -2\hbar^2) \in K$ pour $a, b \in \mathbb{k}$. Pour tout $X \in M_N(\mathbb{k})$ semi-simple et $x \in Sp(X)$ on note $P_{x,X} \in M_N(\mathbb{k}) \subset M_N(K)$ le projecteur sur l'espace propre $\text{Ker}(X - x)$ naturellement associé et on définit $F(U, V)$, pour $U, V \in M_N(\mathbb{k})$ semi-simples, comme la somme des termes $F(u, v)P_{u,U}P_{v,V}$ sur tous les couples $(u, v) \in Sp(U) \times Sp(V)$. Pour traiter simultanément les cas de Φ_{KZ} et $\overline{\Phi}_{\text{KZ}}$, on introduit un paramètre $\epsilon = \pm 1$ et l'on pose $F_\epsilon(a, b) = F(\epsilon a, \epsilon b)$.

Pour alléger les notations, notons $U = \eta_d, V = 2M_d^1$ et $S = M_d^1$. En utilisant le fait que $UV + VU = -4$ et les méthodes de Riemann et Kummer sur l'équation hypergéométrique, González-Lorca montre dans [Gon98] que $\Phi_{\text{KZ}}(\tilde{U}, \tilde{V}) = F_\epsilon(V, U), \Phi_{\text{KZ}}(\tilde{V}, \tilde{U}) = F_\epsilon(U, V)$, où l'on note $\tilde{U} = \epsilon hU, \tilde{V} = \epsilon hV$. On en déduit $M_d^q(\Phi)$ pour $\Phi = \Phi_{\text{KZ}}$ (si $\epsilon = 1$) et $\Phi = \overline{\Phi}_{\text{KZ}}$ (si $\epsilon = -1$) comme suit. Soit $P_\pm = P_{\pm 1, S} = P_{\pm 2, V}$. On a

$$\begin{aligned} F_\epsilon(U, V) &= F_\epsilon(U, 2)P_+ + F_\epsilon(U, -2)P_-, \\ F_\epsilon(V, U) &= P_+F_\epsilon(2, U) + P_-F_\epsilon(-2, U), \end{aligned}$$

donc $\Phi_{\text{KZ}}(\tilde{V}, \tilde{U})S\Phi_{\text{KZ}}(\tilde{U}, \tilde{V})$ est égal à la différence $F_\epsilon(U, 2)P_+F_\epsilon(2, U) - F_\epsilon(U, -2)P_-F_\epsilon(-2, U)$ et ainsi son coefficient en première ligne et deuxième colonne vaut

$$\frac{d+1}{2d}[F_\epsilon(d, 2)F_\epsilon(2, -d) + F_\epsilon(d, -2)F_\epsilon(-2, -d)].$$

On en déduit

$$b_d^s(\Phi_{KZ}) = \frac{d+1}{2d} \frac{q+q^{-1}}{2} (Z(d, 2) + Z(d, -2)),$$

$$b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ}) = \frac{d+1}{2d} \frac{q+q^{-1}}{2} (Z(-d, -2) + Z(-d, 2)),$$

avec $Z(a, b) = F(a, b)F(b, -a)$, donc $b_d^s(\Phi_{KZ})/b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ})$ vaut $\tilde{J}(d+1)\tilde{J}(d-1)/\tilde{J}(d)^2$ avec $\tilde{J}(x) = J(2\hbar x)$ et

$$J(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} = \exp\left(-2\gamma x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} x^{2n+1}\right)$$

où γ est la constante d'Euler. Ainsi,

$$\frac{b_d^s(\Phi_{KZ})}{b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ})} = \exp\left(-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} 2^{2n+1} \hbar^{2n+1} Q_n(d)\right) \tag{*}$$

avec $Q_n(d) = (d+1)^{2n+1} + (d-1)^{2n+1} - 2d^{2n+1}$.

4.4 Associateurs pairs

Soit $\Phi \in \text{Ass}_1^0(\mathbb{k})$, et choisissons pour M_d^1 le modèle orthonormal de Young, de telle sorte que M_d^1 est simultanément orthogonale et symétrique pour tout $d \geq 2$. On en déduit que $M_d^1 \exp(\hbar M_d^1)$ est également symétrique. Soit Ψ la série de Lie sans terme linéaire telle que $\Phi = \exp \Psi$. Comme η_d est symétrique et $x \mapsto -{}^t x$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N(K)$, la transposée de $\Psi(\hbar \eta_d, \hbar M_d^1)$ vaut $-\Psi(-\hbar \eta_d, -\hbar M_d^1)$. On en déduit

$${}^t \Phi(\hbar \eta_d, \hbar M_d^1) = \Phi(-\hbar \eta_d, -\hbar M_d^1)^{-1} = \Phi(\hbar \eta_d, \hbar M_d^1)^{-1}$$

et qu'ainsi $M_d^q(\Phi)$ est symétrique. On a donc $b_d^q(\Phi)^2 = 1 + a_d a'_d$. Comme $1 + a_d a'_d$ est congru à $(d^2 - 1)/d \not\equiv 0$ modulo \hbar , il existe un unique $b_d^0(\Phi) \in A$ vérifiant cette équation qui soit de plus congru à $\sqrt{d^2 - 1}/d$ modulo \hbar . Avec les notations des q -analogues $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$, on trouve $b_d^0(\Phi) = \sqrt{[d+1]_q [d-1]_q} / [d]_q$ d'où

$$b_d^s(\Phi) = \frac{\sqrt{d+1} \sqrt{[d+1]_q [d-1]_q}}{\sqrt{d-1} [d]_q} = \frac{d+1}{d} \left(1 + \frac{\hbar^2}{3!} - \frac{4d^2 - 1}{5!} \hbar^4 + \dots\right).$$

Remarquons qu'avec ces notations, $a_d = -q^{-d}/[d]_q$, $a'_d = q^d/[d]_q$. Comme $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$ on note comme conséquence immédiate de ces calculs :

PROPOSITION 4. *Un modèle matriciel de $H_n(q)$ unitaire au sens de [Mar05] est donné par*

$$M_d^q(\Phi) = \frac{1}{[d]_q} \begin{pmatrix} -q^{-d} & \sqrt{[d+1]_q [d-1]_q} \\ \sqrt{[d+1]_q [d-1]_q} & q^d \end{pmatrix}.$$

Afin de comparer $b_d^s(\Phi)$ et $b_d^s(\Phi_{KZ})$, on introduit les fonctions

$$I(z) = \Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}, \quad \tilde{I}(z) = I(2z\hbar).$$

Comme $(q^n - q^{-n})/2 = i \sin(2n\pi\hbar) = nh/\tilde{I}(n)$, on a

$$b_d^s(\Phi) = \frac{d+1}{d} \frac{\tilde{I}(d)}{\sqrt{\tilde{I}(d+1)\tilde{I}(d-1)}}$$

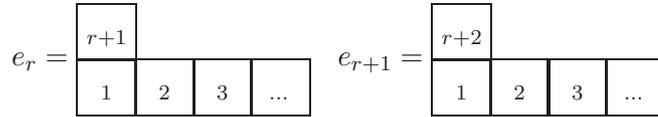


FIGURE 1. Base de la représentation de Burau.

d'où, en utilisant $(q + q^{-1})\tilde{I}(2)/2\tilde{I}(1) = 1$ et l'expression de $\Gamma(1 \pm x)$ en fonction de I et J , on obtient

$$\frac{b_d^s(\Phi_{KZ})}{b_d^s(\Phi)} = \tilde{H}(d) \quad \text{et} \quad \frac{b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ})}{b_d^s(\Phi)} = \frac{1}{\tilde{H}(d)}$$

avec

$$\tilde{H}(d) = \frac{\sqrt{\tilde{J}(d-1)\tilde{J}(d+1)}}{\tilde{J}(d)} = \exp\left(-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} 2^{2n+1} h^{2n+1} Q_n(d)\right)$$

et $Q_n(d) = (d + 1)^{2n+1} + (d - 1)^{2n+1} - 2d^{2n+1}$.

Les formules obtenues nous disent en particulier que le logarithme de $b_d^s(\Phi_{KZ})/b_d^s(\Phi)$ admet pour développement limité

$$\frac{-2i\zeta(3)d}{\pi^3} h^3 + \frac{2id(2d^2 + 1)\zeta(5)}{\pi^5} h^5 - \frac{2id(1 + 3d^4 + 5d^2)\zeta(7)}{\pi^7} h^7 + o(h^8).$$

4.5 Caractères

Choisissons un modèle matriciel de $H_n(q)$ associé à une suite $(b_d)_{d \geq 2} = (b_d(\Phi))_{d \geq 2}$ pour un certain $\Phi \in \text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$. Pour toute partition α de n , la représentation irréductible R associée sur les tableaux standard de forme α est GT-rigide et $R(\delta_2), \dots, R(\delta_n)$ engendre les matrices diagonales, comme on le déduit immédiatement de l'expression de δ_r pour $2 \leq r \leq n$ et de l'invariance de σ_1 sous l'action de $GT_1(\mathbb{k})$. En particulier, prenons pour R la représentation correspondant à la partition $[2, 1^{n-2}]$; c'est la représentation de Burau (réduite). On note e_1, \dots, e_{n-1} sa base suivant l'ordre défini sur les tableaux standard (cf. figure 1), et $\chi_d = Q_{R,d}$ pour $2 \leq d \leq n - 1$. Pour tout $g \in GT_1(\mathbb{k})$, on prend pour représentant de $Q_R(g)$ dans $GL_N(K)$ la matrice diagonale de coefficients $(1, \chi_2(g), \chi_2\chi_3(g), \dots)$. Notant par abus σ'_r (respectivement σ_r) l'action de $\sigma_r \in B_n$ suivant $g.R$ (respectivement R) on a, sur le plan (e_r, e_{r+1}) ,

$$\begin{pmatrix} * & b'_{r+1} \\ * & * \end{pmatrix} = \sigma'_{r+1} = \begin{pmatrix} \chi(g) & 0 \\ 0 & \chi'(g) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} * & b_{r+1} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(g) & 0 \\ 0 & \chi'(g) \end{pmatrix}$$

avec $\chi = \chi_2 \dots \chi_r$ et $\chi' = \chi_2 \dots \chi_{r+1}$, d'où $b'_{r+1} = b_{r+1}\chi_{r+1}(g)$. Comme démontré en § 3.2.3, les χ_r sont à valeurs dans $A^\times = \mathbb{k}[[h]]^\times$. Supposons maintenant $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$ et $b_d = b_d^s(\Phi)$. Si $\Phi' = g.\Phi$ on a alors $b_d^s(\Phi') = b_d^s(\Phi)\chi_d(g)$. En particulier, si $g \in GT_1(\mathbb{C})$ est tel que $\overline{\Phi}_{KZ} = g.\Phi_{KZ}$, $\chi_d(g)^{-1}$ est donné par la formule (*). Comme, à $d \geq 2$ fixé, $Q_n(d) \sim 2n(2n + 1)d^{2n-1}$ pour n grand, les fonctions de n définies sont linéairement indépendantes et on déduit immédiatement du lemme 4 :

PROPOSITION 5. *Les caractères $\chi_d : GT_1(\mathbb{Q}) \rightarrow (\mathbb{Q}[[h]])^\times$ pour $d \geq 2$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} en tant que fonctions $GT_1(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}[[h]]$.*

Pour conclure la démonstration du théorème C, soit α une partition quelconque de n , R la représentation de $H_n(q)$ correspondante suivant le modèle associé à $b_d^s(\Phi)$ et N sa dimension. Si T est un tableau standard de taille n , et $i < j$ avec $c_i(T) > c_j(T)$, on note $d_T(i, j) = l_j(T) - l_i(T) + c_i(T) - c_j(T) > 0$. Un représentant dans $GL_N(K)$ de $Q_R(g)$ pour $g \in GT_1(\mathbb{k})$ est alors donné par

la matrice diagonale qui à T de forme α associe $\chi_T(g)T$ avec

$$\chi_T(g) = \prod_{\substack{i < j \\ c_i(T) > c_j(T)}} \chi_{d_T(i,j)}(g).$$

En effet, il suffit de montrer que cette matrice conjugue les représentations associées à $b_d^s(\Phi)$ et $b_d^s(\Phi')$, c'est-à-dire les expressions de σ_r pour $1 \leq r \leq n - 1$ suivant ces deux représentations. Fixant un tel r , il suffit de le montrer sur les plans (T_1, T_2) où T_2 est déduit de T_1 par l'échange de r et $r + 1$. Or, si $T_1 < T_2$ et en notant d la distance axiale associée, on a $d = d_{T_2}(r, r + 1)$ et $\chi_{T_2}(g) = \chi_{T_1}(g)\chi_d(g)$, donc $M_d^q(\Phi)$ est conjuguée par la matrice diagonale de coefficients $(1, \chi_d(g))$, ce qui donne bien $M_d^q(\Phi')$.

La relation entre les caractères issus de deux diagrammes symétriques l'un de l'autre est la suivante. Soit T un tableau de forme α , T' son symétrique de forme α' . Pour $d < 0$, notons par convention $\chi_d = 1$. Alors

$$\chi_T \chi_{T'} = \prod_{\substack{i < j \\ c_i(T) > c_j(T)}} \chi_{d_T(i,j)} \prod_{\substack{i < j \\ l_i(T) > l_j(T)}} \chi_{d_T(j,i)}$$

est encore égal au produit des $\chi_{d_T(i,j)}\chi_{d_T(j,i)}$ sur tous les couples $i < j$ tels que $c_i(T) > c_j(T)$ ou (exclusif) $l_i(T) > l_j(T)$. De tels couples sont en bijection avec les crochets du diagramme α , c'est-à-dire les couples (x, y) de cases de α où x (respectivement y) est en colonne c (respectivement c') et ligne l (respectivement l') avec $c < c'$ et $l > l'$: à (x, y) on associe le couple (i, j) où i (respectivement j) est le minimum (respectivement le maximum) de leurs contenus dans T ; inversement, la condition sur i et j signifie que les deux cases qui les contiennent forment un crochet. Pour un tel crochet (x, y) on définit sa longueur $\delta = \delta(x, y) = c' - c + l - l'$. Alors

$$\chi_{d_T(i,j)}\chi_{d_T(j,i)} = \chi_\delta \chi_{-\delta} = \chi_\delta$$

et

$$\chi_T \chi_{T'} = \prod_{\text{crochets } (x,y)} \chi_{\delta(x,y)}$$

dépend seulement de α , et plus de T .

Soit ε l'automorphisme involutif de K défini par $f(h) \mapsto f(-h)$ et $U_N^\varepsilon(K) = \{x \in GL_N(K) \mid x^{-1} = {}^t \varepsilon(x)\}$ le groupe unitaire associé. Si l'on part d'une représentation orthogonale $\rho_0 : \mathfrak{S}_n \rightarrow O_N(\mathbb{k})$, les représentations $\widehat{\Phi}(\rho)$ de l'algèbre de Hecke obtenues se factorisent par $U_N^\varepsilon(K)$ (cf. [Mar05, §3.2.2]). On en déduit que les caractères χ_d se factorisent par $U_1^\varepsilon(A) = \{x \in A \mid \varepsilon(x) = x^{-1}\}$, et que les $\chi_d(g)$ sont des exponentielles de séries *impaires* en h (sans terme linéaire d'après le calcul de $b_d^s(\Phi)$ à l'ordre 3 en §4.2).

4.6 Résonances

Remarquons que si une partition de n est donnée, les caractères χ_T pour R parcourant les tableaux standard de forme α ne sont pas nécessairement distincts, comme le montre l'exemple de $\alpha = [3, 2]$: un représentant de $Q_R(g)$ dans $GL_5(K)$ est alors donné par la matrice diagonale de coefficients $(1, \chi_3(g), \chi_2\chi_3(g), \chi_2\chi_3(g), \chi_2^2\chi_3(g))$.

PROPOSITION 6. *La représentation de $H_n(q)$ associée à un diagramme α est sans résonances si et seulement si α est une équerre ou égal à $[2, 2]$.*

Démonstration. Soit R la représentation de Burau (réduite), et e_1, \dots, e_{n-1} la base choisie précédemment. Comme les diagrammes en équerres correspondent aux puissances extérieures de R , il faut montrer que $\Lambda^r R$ est sans résonances pour $r \in [0, n - 1]$. Fixons r et associons à toute partie

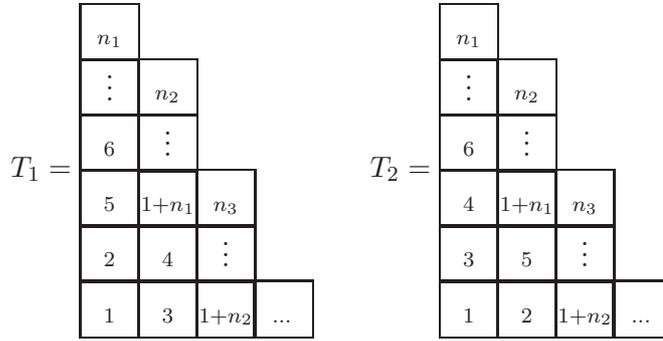


FIGURE 2. Tableaux tels que $\chi_{T_1} = \chi_{T_2}$.

$I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset [1, n - 1]$ de cardinal r avec $i_1 < \dots < i_r$ le vecteur $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$. L'ensemble des vecteurs de ce type forme une base de $\Lambda^r R$. Un relèvement linéaire de Q_R est donné par l'action linéaire $g.e_i = \psi_i(g)e_i$, avec $\psi_1 = 1, \psi_2 = \chi_2, \dots, \psi_{n-1} = \chi_2 \dots \chi_{n-1}$. Un relèvement dans $GL(\Lambda^r R)$ de l'action projective de $GT_1(\mathbb{k})$ sur $\Lambda^r R$ est donc donné par $g \mapsto Q(g)$ avec

$$Q(g)e_I = \left(\prod_{i \in I} \psi_i \right) (g) e_I = \left(\prod_{d=2}^{n-1} \chi_d^{f_d(I)} \right) (g) e_I$$

où $f_d(I) = \#\{i \in I \mid i \geq d\}$. Comme les χ_d sont algébriquement indépendants, il s'agit donc de montrer que, si $f_d(I) = f_d(J)$ pour $d \in [2, n - 1]$, alors $I = J$, au moins si $\#I = \#J = r$. Mais dans ce cas, on a également $\#I = f_1(I) = f_1(J) = \#J$, d'où l'on déduit immédiatement $I = J$, puisque $i \in I \Leftrightarrow f_i(d) > f_{i-1}(d)$.

Le cas du diagramme $[2, 2]$ se ramène à celui de l'équerre $[2, 1]$, puisque ce deuxième est la restriction à $B_3 \subset B_4$ du premier.

D'après la relation entre χ_T et $\chi_{T'}$ pour deux tableaux T et T' symétriques l'un de l'autre, la représentation associée à α sera sans résonances si et seulement si celle associée à α' l'est. Il reste donc à montrer que, si $\alpha \geq [3, 2]$, il existe deux tableaux distincts T_1 et T_2 de forme α tel que $\chi_{T_1} = \chi_{T_2}$. Considérons les deux tableaux de la figure 2 : on remplit d'abord les cases du sous-diagramme $[3, 2]$ comme indiqué avec les nombres de 1 à 5, puis l'on remplit les autres cases dans l'ordre standard avec les nombres restant. On a alors

$$\begin{aligned} \chi_{T_1} &= (\chi_3 \dots \chi_{n_1-1})(\chi_2 \dots \chi_{n_1-3}) = \chi_2 \chi_3^2 \dots \chi_{n_1-3}^2 \chi_{n_1-2} \\ &= (\chi_2 \dots \chi_{n_1-2})(\chi_3 \dots \chi_{n_1-3}) = \chi_{T_2}. \end{aligned}$$

□

Appendice A. Cocycles de $GT(\mathbb{k})$

On fait agir $\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^\times$ sur $f(h) \in K = \mathbb{k}((h))$ par $(f.\alpha)(h) = f(\alpha h)$. Cette action laisse stable l'anneau de valuation discrète $A = \mathbb{k}[[h]]$, son idéal maximal $A_0 = hA$ et $A_1 = 1 + hA = \exp A_0$. Le morphisme naturel $\pi : GT(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}^\times$ de noyau $GT_1(\mathbb{k})$ induit ainsi une action de $GT(\mathbb{k})$ sur K , et donc sur $PGL_N(K)$. De manière à obtenir, non plus seulement des représentations projectives de $GT_1(\mathbb{k})$ mais des 1-cocycles (*a priori* non abéliens) de $GT(\mathbb{k})$ à valeurs dans $PGL_N(K)$, on peut renforcer la définition 1 comme suit :

DÉFINITION A.1. Une représentation $R \in V_N(\mathbb{k})$ est dite *fortement* GT-rigide si R est absolument irréductible et, pour tout $g \in GT(\mathbb{k})$, $g.R$ est isomorphe à $\sigma \mapsto R(\sigma).\pi(g)$.

Si $R \in V_N(\mathbb{k})$ est fortement GT-rigide, R est en particulier GT-rigide. De plus il existe alors, pour tout $g \in GT(\mathbb{k})$, un élément $Q_R(g) \in PGL_N(K)$ tel que

$$\forall \sigma \in B_n, (g.R)(\sigma) = Q_R(g)^{-1}(R(\sigma).\pi(g))Q_R(g).$$

On vérifie facilement que $Q_R(g_1g_2) = (Q_R(g_1).\pi(g_2))Q_R(g_2)$, c'est-à-dire que Q_R appartient à $Z^1(GT(\mathbb{k}), PGL_N(K))$. Si de plus R est agrégeante, on en déduit des cocycles $\chi \in Z^1(GT(\mathbb{k}), A_1)$ ainsi que des cocycles

$$\psi = \log \chi \in Z^1(GT(\mathbb{k}), A_0).$$

Ces cocycles permettent enfin de définir des représentations $GT(\mathbb{k}) \rightarrow GL_2(A)$ par

$$g \mapsto \begin{pmatrix} \pi(g) & \psi(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les représentations $R \in V_N(\mathbb{k})$ qui sont fortement GT-rigides, on trouve notamment les représentations irréductibles de l'algèbre d'Iwahori–Hecke de type A et celles de l'algèbre de Birman–Wenzl–Murakami.

Si la restriction de χ à $GT_1(\mathbb{k})$ est non triviale (cf. proposition 3), χ n'est pas un cobord et la représentation de $GT(\mathbb{k})$ dans $GL_2(A)$ qui s'en déduit n'est pas scindée. De façon générale, on montre inversement que les éléments non nuls de $H^1(GT(\mathbb{k}), A_1)$ proviennent nécessairement de caractères non triviaux de $GT_1(\mathbb{k})$.

PROPOSITION A.1. *Le morphisme de restriction $H^1(GT(\mathbb{k}), A_1) \rightarrow \text{Hom}(GT_1(\mathbb{k}), A_1)$ est injectif.*

En effet, la suite exacte d'inflation-restriction en cohomologie des groupes associée à la suite exacte $1 \rightarrow GT_1(\mathbb{k}) \rightarrow GT(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}^\times \rightarrow 1$ est

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{k}^\times, A_1) \rightarrow H^1(GT(\mathbb{k}), A_1) \rightarrow H^1(GT_1(\mathbb{k}), A_1)$$

avec $H^1(GT_1(\mathbb{k}), A_1) = \text{Hom}(GT_1(\mathbb{k}), A_1)$. Il suffit donc de montrer que $H^1(\mathbb{k}^\times, A_1) = 0$. Pour ce faire notons, pour $m \geq 0$, \mathbb{k}_m le \mathbb{k}^\times -module \mathbb{k} pour l'action $(\alpha, x) \mapsto \alpha^m x$.

LEMME A.1. *Si $m \geq 1$, $H^1(\mathbb{k}^\times, \mathbb{k}_m) = 0$.*

Démonstration. Si $f \in Z^1(\mathbb{k}^\times, \mathbb{k}_m)$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$ sont tels que $\alpha_1^m \neq 1$ et $\alpha_2^m \neq 1$,

$$f(\alpha_1\alpha_2) = \alpha_1^m f(\alpha_2) + f(\alpha_1) = f(\alpha_2\alpha_1) = \alpha_2^m f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$$

donc $f(\alpha)/(\alpha^m - 1)$ ne dépend pas du choix de α , pourvu que $\alpha^m \neq 1$. Comme $\text{car.}\mathbb{k} = 0$, $\mathbb{k}^\times \neq \mu_m(\mathbb{k})$ et il existe $x \in \mathbb{k}$ bien défini tel que $f(\alpha) = (\alpha^m - 1)x = \alpha.x - x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{k}^\times \setminus \mu_m(\mathbb{k})$. Il reste à montrer que $f(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mu_m(\mathbb{k})$. Or la restriction de f à $\mu_m(\mathbb{k})$ est dans $\text{Hom}(\mu_m(\mathbb{k}), \mathbb{k}) = 0$ puisque \mathbb{k} est sans torsion, donc f est un cobord et $H^1(\mathbb{k}^\times, \mathbb{k}_m) = 0$. \square

On en déduit

$$H^1(\mathbb{k}^\times, A_1) \simeq H^1(\mathbb{k}^\times, A_0) \simeq \prod_{m \geq 1} H^1(\mathbb{k}^\times, \mathbb{k}_m) = 0,$$

le premier isomorphisme découlant de l'isomorphisme de \mathbb{k}^\times -modules entre $(A_0, +)$ et (A_1, \times) donné par l'exponentielle, et le second du fait que $A_0 \simeq \prod_{m \geq 1} \mathbb{k}_m$ en tant que \mathbb{k}^\times -module.

Appendice B. Calculs en degré 5

Pour faire les calculs explicitement, on introduit des bases formées de monômes de Lie des composantes homogènes de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ jusqu'en degré 5. D'autre part, on note $a \equiv b$ si $\omega(a - b) \geq 6$.

TABLE 1. Bases de $\mathcal{L}(\mathbb{k})$ en degré au plus 5.

| | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $w_3 = [x, y]$ | $w_4 = [x, [x, y]]$ | $w_5 = [y, [y, x]]$ |
| $w_6 = [x, [x, [x, y]]]$ | $w_7 = [y, [x, [x, y]]]$ | $w_8 = [y, [y, [x, y]]]$ |
| $w_9 = [x, [x, [x, [x, y]]]]$ | $w_{10} = [y, [x, [x, [x, y]]]]$ | $w_{11} = [y, [y, [x, [x, y]]]]$ |
| $w_{12} = [y, [y, [y, [x, y]]]]$ | $w_{13} = [[x, y], [x, [x, y]]]$ | $w_{14} = [[x, y], [y, [x, y]]]$ |

Notons ψ_1 et ψ_2 les éléments de $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ correspondant aux éléments f_1 et f_2 de l'interprétation « hamiltonienne » de Drinfeld dans [Dri91]. On exprime facilement $\psi_1 = w_5 - w_4$, et

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2w_{10} - 2w_{11} - 2w_{12} + 2w_{13} + w_{14}.$$

L'élément ψ_2 se déduit de $\partial f_2/\partial x$ par la transformation involutive $F(x, y) \mapsto F(x, -x - y)$, dont la matrice dans la base w_9, \dots, w_{14} des éléments de degré 5 (cf. table 1) s'écrit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\psi_2 = -2w_9 - 4w_{10} - 4w_{11} - 2w_{12} - w_{13} - 3w_{14}.$$

On pose $\psi_{a,b} = a\psi_1 + b\psi_2 \in \mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ pour $a, b \in \mathbb{k}$, et on note $\Psi_{a,b} \in GRT_1(\mathbb{k})$ son exponentielle au sens du groupe. Si $\Phi \in \text{Ass}_1(\mathbb{k})$, on sait que l'on peut écrire $\Phi \equiv 1 + \frac{1}{24}w_3 - c\psi_1 + \phi_4 + \phi_5$ avec ϕ_4, ϕ_5 homogènes de degrés respectifs 4 et 5. Alors

$$\Phi \cdot \Psi_{a,b} = \exp(s_{\psi_{a,b}})(\Phi) \equiv \Phi + a\psi_1 + b\psi_2 + \frac{a}{24}(w_3\psi_1 + [[\psi_1, x], y]),$$

et de plus $[[\psi_1, x], y] = -w_{11} - w_{10}$. D'autre part la formule de Le et Murakami [LM96] dit

$$\Phi_{\text{KZ}} \equiv 1 + \frac{w_3}{24} + \zeta(3)\psi_1 + \phi_4^{\text{KZ}} + \frac{1}{2}\zeta(5)\psi_2 - \frac{1}{24}\zeta(3)(w_{10} + w_{11} + w_3\psi_1)$$

avec $\zeta(n) = \zeta(n)/(2i\pi)^n$, et $\phi_4^{\text{KZ}} = (-w_7 - 4w_6 - 4w_8 + 5w_3^2)/5760$. On en déduit d'une part que

$$\Phi_0 = \Phi_{\text{KZ}} \cdot \Psi_{-\zeta(3), -\zeta(5)/2} \equiv 1 + \frac{1}{24}w_3 + \phi_4^{\text{KZ}}$$

est pair jusqu'en degré 6, et d'autre part que tout associateur a les mêmes termes de degré 2 et 4.

Pour obtenir l'expression générale d'un élément de $GT_1(\mathbb{k})$ jusqu'en degré 5, il suffit de calculer $g_{a,b} = \iota_{\Phi_0}(\Psi_{a,b})$, uniquement déterminé par $g_{a,b} \cdot \Phi_0 = \Phi_0 \cdot \Psi_{a,b}$. Posons $g_{a,b} = \exp F$. A des termes d'ordre au moins 4 près, on a $\Phi_0 = 1 + w_3/24$, $\Phi_0 e^x \Phi_0^{-1} = e^x + [w_3, x]/24$, et $\log \Phi_0 e^x \Phi_0^{-1} = x - w_4/24$. Notons G_4, G_5 les composantes homogènes de degré 4 et 5 de $g_{a,b}$. On a vu que $g_{a,b} \equiv 1 + a\psi_1 + G_4 + G_5$, d'où $F \equiv a\psi_1 + G_4 + G_5$. Or $\psi_1 = w_5 - w_4$, et

$$\begin{cases} w_4(x - w_4/24, y) \equiv w_4 + (w_{10} + 2w_{13})/24, \\ w_5(x - w_4/24, y) \equiv w_5 - w_{11}/24, \end{cases}$$

d'où

$$F(\log(\Phi_0 e^x \Phi_0^{-1}), y) \equiv a\psi_1 + G_4 + G_5 - \frac{a}{24}(w_{10} + w_{11} + 2w_{13}).$$

D'autre part $\Phi_0 \cdot \Psi_{a,b} \equiv \Phi_0 + a\psi_1 + b\psi_2 + a(w_3\psi_1 - w_{11} - w_{10})$ d'où

$$\begin{aligned} (\Phi_0 \cdot \Psi_{a,b}) \cdot \Phi_0^{-1} &= 1 + a\psi_1 + b\psi_2 + a([w_3, \psi_1] - w_{11} - w_{10})/24 \\ &= 1 + a\psi_1 + b\psi_2 - a(w_{10} + w_{11} + w_{13} + w_{14})/24 \end{aligned}$$

et son logarithme vaut

$$a\psi_1 + b\psi_2 - a(w_{10} + w_{11} + w_{13} + w_{14})/24 = F(\log(\Phi_0 e^x \Phi_0^{-1}), y)$$

d'où $G_4 = 0$, et $G_5 = b\psi_2 + a(w_{13} - w_{14})/24$ soit

$$G_5 = -\left(2bw_9 + 4bw_{10} + 4bw_{11} + 2bw_{12} + \left(b - \frac{a}{24}\right)w_{13} + \left(b + \frac{a}{24}\right)w_{14}\right).$$

On peut d'autre part calculer

$$\chi_d(g_{a,b}) = \frac{b_d^s(\Phi_0 \cdot \Psi_{a,b})}{b_d^s(\Phi_0)} = 1 - 16adh^3 - 128db(1 + 2d^2)h^5 + \dots$$

Pour faire la comparaison avec les termes $\kappa_m^*(\sigma)$ d'Ihara, il faut calculer, pour chaque monôme de Lie w_r , les éléments $w'_r = \pi_{ab} \circ p_x(w_r(\log(1+x), \log(1+y)))$. On trouve

$$\begin{cases} w'_4 \equiv \frac{1}{2}y^2x^2 - \frac{1}{3}y^3x^2 - x^2y + x^3y - \frac{1}{2}y^2x^3 - \frac{11}{12}x^4y, \\ w'_5 \equiv \frac{1}{3}y^2x^3 + y^2x - \frac{1}{2}y^2x^2 + \frac{1}{2}y^3x^2 - y^3x + \frac{11}{12}y^4x, \end{cases}$$

et les images de w_9, \dots, w_{14} sont respectivement $-x^4y, -y^2x^3, -y^3x^2, -y^4x, 0, 0$. On déduit alors de la formule générale de $g_{a,b}$ et de

$$\begin{aligned} \psi_{ab}^\sigma &\equiv 1 + \frac{\kappa_3^*(\sigma)}{2}(yx^2 + y^2x - yx^3 - y^2x^2 - y^3x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{24}\kappa_5^*(\sigma) + \frac{11}{24}\kappa_3^*(\sigma)\right)(x^4y + y^4x) \\ &\quad + \left(\frac{5}{12}\kappa_3^*(\sigma) + \frac{1}{12}\kappa_5^*(\sigma)\right)(y^3x^2 + y^2x^3) \end{aligned}$$

que $a = \kappa_3^*(\sigma)/2$ et $b = \kappa_5^*(\sigma)/48$.

Si $l = 3$, $\kappa_3^*(\sigma) = \kappa_3(\sigma)/8$, $\kappa_5^*(\sigma) = \kappa_5(\sigma)/80$. On peut vérifier

$$\frac{1}{24}(\kappa_5^* + 11\kappa_3^*) = \frac{1}{8.80} \frac{1}{3}(\kappa_5 + 110\kappa_3) \in \mathbb{Z}_3$$

parce que, modulo 3, $\kappa_5 + 110\kappa_3 \equiv 111\kappa_3 \equiv 0$,

$$\frac{1}{12}(5\kappa_3^* + \kappa_5^*) = \frac{1}{4.80} \frac{1}{3}(50\kappa_3 + \kappa_5) \in \mathbb{Z}_3$$

car $50\kappa_3 + \kappa_5 \equiv 51\kappa_3 \equiv 0$ modulo 3.

Si $l = 2$, on a $(\kappa_5^* + 11\kappa_3^*)/24 = (3\kappa_5 + 341\kappa_3)/(2^3 \cdot 279) \in \mathbb{Z}_2$ car $3\kappa_5 + 341\kappa_3 \equiv 8\kappa_3 \equiv 0$ modulo 8. De même $(5\kappa_3^* + \kappa_5^*)/12 = (155\kappa_3 + 3\kappa_5)/(2^2 \cdot 279) \in \mathbb{Z}_2$ parce que $155\kappa_3 + 3\kappa_5 \equiv 3(\kappa_3 + \kappa_5) \equiv 3.2\kappa_3 \equiv 0$ modulo 4. On a donc vérifié que les coefficients de $\psi^{ab}(\sigma)$ appartiennent à \mathbb{Z}_l . On déduit également de ces formules qu'au moins les premiers coefficients de $\chi_d(\sigma)$, $-16ad = -8d\kappa_3^*(\sigma)$ et $-128bd(1 + 2d^2) = -8\kappa_5^*(\sigma)d(1 + 2d^2)/3$ appartiennent à \mathbb{Z}_l , puisque $d(1 + 2d^2)$ est divisible par 3 pour tout $d \in \mathbb{N}$.

BIBLIOGRAPHIE

Bou N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* (Hermann, Paris, 1968–1982).
 CP95 V. Chari et A. Pressley, *A guide to quantum groups* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

- Dri91 V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.
- Gon98 J. González-Lorca, *Série de Drinfeld, monodromie et algèbres de Hecke*, Thèse de l’université Paris XI – Orsay (1998).
- IS87 H. Ichimura et K. Sakaguchi, *The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after C. Soulé), and some related topics*, dans *Galois representations and arithmetic algebraic geometry*, Kyoto 1985 and Tokyo 1986, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 12 (Kinokuniya, Tokyo, 1987), 53–64.
- Iha91 Y. Ihara, *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions*, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, 1990 (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1991), 99–120.
- LM96 T. Q. T. Le et J. Murakami, *The universal Vassiliev–Kontsevitch invariant for framed oriented links*, Compositio Math. **102** (1996), 41–64.
- Mar01 I. Marin, *On KZ-systems which are irreducible under the action of the symmetric group*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **333** (2001), 517–522.
- Mar03 I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), 1323–1364.
- Mar04 I. Marin, *Irréductibilité générique des produits tensoriels de monodromies*, Bull. Soc. Math. France **132** (2004), 201–232.
- Mar05 I. Marin, *On the representation theory of braid groups*, Prépublication (2005), arXiv:math.RT/0502118.
- Rac00 G. Racinet, *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfeld*, Thèse de l’université Paris XI – Orsay (2000).
- Sou81 C. Soulé, *On higher p -adic regulators*, dans *Algebraic K-theory*, Evanston 1980, Lecture Notes in Mathematics, vol. 854 (Springer, Berlin-New York, 1981), 372–401.
- Sou87 C. Soulé, *Éléments cyclotomiques en K -théorie*, dans *Journées arithmétiques de Besançon 1985*, Astérisque, vol. 147–148 (Société Mathématique de France, Paris, 1987), 225–257.

Ivan Marin marin@math.jussieu.fr

UFR de Mathématiques, Université Paris 7, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France