Canad. Math. Bull. Vol. **58** (4), 2015 pp. 692–703
http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2015-022-2

Sur les algèbres de Lie associées à une connexion

Princy Randriambololondrantomalala, H. S. G. Ravelonirina
et F. M. Anona

Abstract. Let Γ be a connection on a smooth manifold M. In this paper we give some properties of Γ by studying the corresponding Lie algebras. In particular, we compute the first Chevalley–Eilenberg cohomology space of the horizontal vector fields Lie algebra on the tangent bundle of M, whose the corresponding Lie derivative of Γ is null, and of the horizontal nullity curvature space.

Résumé. Etant donné une connexion Γ sur une variété différentiable M, dans ce papier on se propose de donner quelques propriétés de Γ en étudiant les algèbres de Lie associées à cette connexion. En particulier, on calcule le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de la partie horizontale de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le fibré tangent de M dont la dérivée de Lie correspondante de Γ est nulle, et de l'espace de nullité horizontal de la courbure.

1 Introduction

Nous avons étudié dans [1–3] certains types de sous-algèbres de Lie de champs de vecteurs sur une variété différentiable M de classe C^∞. Dans ce papier, nous proposons quelques propriétés d'une connexion sur M en étudiant certaines algèbres de Lie qui lui sont attachées.

Soit Γ une structure presque-produit sur le fibré tangent TM, où Γ^2 est égal à l'identité. Cette structure est une connexion au sens de Grifone définie sur M, *cf.* [5]. La donnée d'une telle connexion réalise une décomposition de TTM du fibré tangent de TM en une somme directe d'espace horizontal $h(TM)$ et d'espace vertical $v(TM)$, où h et v sont respectivement le projecteur horizontal et le projecteur vertical de la connexion correspondant à la valeur propre respective 1 et −1. Soient $\mathcal{T}M$ le fibré tangent TM privé de la section nulle, et R la courbure de Γ. On s'interesse à l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma$ des champs de vecteurs sur $\mathcal{T}M$ dont la dérivée de Lie correspondante de Γ est nulle, *cf.* [6], et à l'algèbre de Lie de l'espace de nullité horizontal de la courbure $\mathfrak{N}_R^h$. On étudie le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de l'espace de nullité horizontal de la courbure. On donne quelques propriétés de la connexion à partir du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ et à partir de l'espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{A}_\Gamma$. En effet, on peut appliquer un résultat dans [2] pour le calcul cohomologique

Reçu par la rédaction le 8 août 2013.
Publié electronique au 7 septembre 2015.
Les auteurs sont supportés par une bourse de recherche, initiative de Pr. Ingrid Daubechies en collaboration avec "Institute for the Conservation of Tropical Environments" (ICTE) Madagascar.
Classification (AMS) par sujet: **17B66**, 53B15, 17B56.
Mots clés: algèbre de Lie, connexion, cohomologie de Chevalley–Eilenberg, champs dont la dérivée de Lie correspondante à une connexion est nulle, espace de nullité de la courbure.

de l'espace de nullité horizontal. En utilisant certaines propriétés d'une distribution de classe C^∞, on trouve que la partie horizontale du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ est égale à $\mathfrak{N}_R^h$ si et seulement si la connexion est plate. L'isomorphisme (en tant que module) entre le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{N}_R^h$ et la partie verticale du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$ est équivalente à la nullité de la courbure. L'intersection de $\mathfrak{A}_\Gamma$ avec l'espace de nullité de la courbure $\mathfrak{N}_R$ est un produit direct de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ des champs de $\mathfrak{A}_\Gamma$ dans l'espace horizontal et de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ des champs de $\mathfrak{A}_\Gamma$ dans l'espace vertical. En particulier, l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ coïncide à l'intersection de la distribution $\mathfrak{N}_R$ avec l'ensemble des champs horizontaux projetables. Compte tenu du fait que $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est une distribution involutive de M, les résultats de [2] s'appliquent à $\mathfrak{A}_\Gamma^h$. Ainsi, l'idéal dérivé de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ lui-même. Si pour tout $x \in \mathcal{T}M$, il existe $X \in \mathfrak{A}_\Gamma^h$ tel que $X(x) \neq 0$, alors le centre de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est réduit à zéro. Alors le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ (resp. du normalisateur quotienté avec le centralisateur de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$) est égal au quotient de ce normalisateur avec $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ (resp. à $\{0\}$). Par ailleurs, on trouve qu'un champ de vecteurs est un élément de $\mathfrak{A}_\Gamma$ si et seulement s'il laisse invariant les sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres de Γ. La partie verticale $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ est le centralisateur de l'algèbre de Lie engendré par tous les champs horizontaux et projetables. On en tire que le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$ est le produit direct des premiers espaces de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ et de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$. Cet espace de cohomologie est nul si et seulement si la connexion est plate. De même, on a l'équivalence entre la nullité de la courbure et la nullité de la partie verticale du centralisateur de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$.

2 Préliminaires

Dans toute la suite, M est une variété différentiable de dimension n, TM est le fibré tangent de M. On note $\mathcal{T}M$ le fibré TM privé de la section nulle. Tous les objets utilisés sont supposés C^∞ sur M ou sur $\mathcal{T}M$, sauf mention expresse. L'ensemble $\chi(M)$ (resp. $\chi(\mathcal{T}M)$) désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M (resp. sur $\mathcal{T}M$) avec le crochet habituel de champs de vecteurs. On notera dans la suite par $\cong$ un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Un sous-ensemble S de $\chi(M)$ (resp. $\chi(\mathcal{T}M)$) vérifiant (H) signifie que pour tout $x \in M$ (resp. $x \in \mathcal{T}M$), il existe $X \in S$ tel que $X(x) \neq 0$. Une distribution sur M (resp. sur $\mathcal{T}M$) est un $F(M)$-sous-module de $\chi(M)$ (resp. $F(\mathcal{T}M)$-sous-module de $\chi(\mathcal{T}M)$). On adopte la convention d'Einstein sur la sommation d'indices, sauf mention expresse.

Définition 2.1 On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur TM, *cf.* [5] :

$$0 \to \pi^*(TM) \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} \pi^*(TM) \to 0,$$

où $\pi\colon TM \to M$ la projection du fibré tangent à M ; $P\colon TTM \to TM$ la projection du fibré tangent à TM, i : l'injection naturelle ; $j = (P, \pi_*)$ où π_* est l'application linéaire tangente de π. L'application $J = i \circ j$ est la structure tangente sur TM.

Définition 2.2 On appelle connexion au sens de Grifone sur M, *cf.* [5], une 1-forme vectorielle Γ de TM, C^∞ sur $TM - \{0\}$ telle que $J\Gamma = J$, $\Gamma J = -J$.

On a l'égalité $\Gamma^2 = \mathrm{I}$ où I est l'application identité de $\chi(TM)$ et Γ a deux valeurs propres 1 et −1. La connexion ainsi définie est une structure presque-produit sur TM. Le projecteur horizontal (resp. le projecteur vertical) de Γ est défini par $h = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \Gamma)$ (resp. par $v = \frac{1}{2}(\mathrm{I} - \Gamma)$).

Une connexion Γ permet d'obtenir une décomposition de TTM, le fibré tangent de TM, en somme d'espaces horizontal et vertical :

$$TTM = H(TM) \oplus V(TM)$$

avec

$$H(TM) = \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Ker}(v) \quad \text{et} \quad V(TM) = \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(h).$$

Dans tout ce qui suit, Γ est une connexion au sens de Grifone.

Définition 2.3 La courbure de la connexion Γ est définie par la 2-forme vectorielle $R = -\frac{1}{2}[h, h]$ où

$$\frac{1}{2}[h, h](X, Y) = [hX, hY] + h[X, Y] - h[hX, Y] - h[X, hY], \quad \forall X, Y \in \chi(\mathcal{T}M).$$

En coordonnées locales (x^i, y^j) de TM, Γ s'écrit $dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$, *cf.* [5] :

$$R = \frac{1}{2} R^i_{jk} dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{où} \quad R^i_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^l_k \frac{\partial \Gamma^i_j}{\partial y^l} - \Gamma^l_j \frac{\partial \Gamma^i_k}{\partial y^l}.$$

L'espace de nullité de la courbure de Γ est

$$\mathfrak{N}_R = \{X \in \chi(\mathcal{T}M) \text{ tel que } R(X, Y) = 0, \forall Y \in \chi(\mathcal{T}M)\}.$$

L'espace $\mathfrak{N}_R$ est une distribution de $\mathcal{T}M$. Comme la courbure R est semi-basique, l'espace vertical est inclus dans $\mathfrak{N}_R$. En général, l'espace de nullité $\mathfrak{N}_R$ n'est pas involutif, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.4 Soient $M = \mathbb{R}^3$, $(x^i, y^i)_{1\le i\le 3}$ le système de coordonnées dans $T\mathbb{R}^3$ et Γ une connexion linéaire au sens de Grifone telle que $\Gamma^1_1 = x^2 y^3$, $\Gamma^1_3 = x^1 y^2$, et les autres nuls. Les coefficients de la courbure R sont $R^1_{2,1} = y^3$, $R^1_{3,1} = -y^2$, et les autres nuls.

L'espace de nullité de la courbure $\mathfrak{N}_R$ est

$$\mathfrak{N}_R(y^3 \neq 0) = \left\{ \frac{y^2}{y^3} X^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$$

et

$$\mathfrak{N}_R(y^3 = 0) = \left\{ \left(y^2 \frac{\partial X^3}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) (y^3 = 0) \right\},$$

où les X^i et Y^i sont des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^3$. Le crochet de champs de l'espace de nullité $\frac{\partial}{\partial y^2}$ et $y^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + y^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ est $\frac{\partial}{\partial x^2}$, n'appartenant pas à $\mathfrak{N}_R$.

Remarque 2.5 Si $n = 1$, compte tenu de l'antisymétrie de la courbure, la connexion est trivialement plate. De même, si $n = 2$ et si on suppose que $\mathfrak{N}_R^h \neq \{0\}$ alors la connexion est plate.

En tenant compte de la remarque précédente, on suppose dans toute la suite que $n > 2$.

3 Etude de quelques algèbres de Lie rattachées à l'espace horizontal

Définition 3.1 L'espace de nullité horizontal est défini par $\mathfrak{N}_R^h = \mathfrak{N}_R \cap h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$.

Dans [8], on a montré que cet espace de nullité horizontal est involutif. Ici, on s'intéresse sur quelques algèbres de Lie qui sont liées à $\mathfrak{N}_R^h$.

Proposition 3.2 *S'il existe un sous-ensemble de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs projetables engendrant la distribution $\mathfrak{N}_R^h$, alors $\mathfrak{N}_R$ est involutive.*

Démonstration Comme les $\mathfrak{N}_R^h$ et $v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$ sont des distributions involutives et que le module $\mathfrak{N}_R = \mathfrak{N}_R^h \oplus v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$, il suffit de vérifier que $\big[\mathfrak{N}_R^h, v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)\big]$ est une partie de $\mathfrak{N}_R$. C'est le cas, car cet ensemble est inclus dans $v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big) \subset \mathfrak{N}_R$ par le fait que $\mathfrak{N}_R^h$ soit engendré par des champs projetables. ∎

Définition 3.3 Une dérivation D d'une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie A est une application $\mathbb{R}$-linéaire de A dans A telle que $\forall X, Y \in A$, $D[X,Y] = [D(X),Y] + [X,D(Y)]$.

Définition 3.4 On appelle premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg d'une algèbre de Lie A, *cf.* [9], l'espace quotient $\mathrm{H}^1(A) = \mathrm{Der}(A)/\mathrm{ad}(A)$ où $\mathrm{Der}(A)$ (resp. $\mathrm{ad}(A)$) est l'ensemble des dérivations (resp. des dérivations intérieures) de A.

Théorème 3.5 *L'idéal dérivé de $\mathfrak{N}_R^h$ coïncide à $\mathfrak{N}_R^h$. Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}_R^h$ vérifie (H), le centralisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ est nul et, si on note $\mathcal{N}_R$ le normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$, alors*

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{N}_R^h) \cong \mathcal{N}_R/\mathfrak{N}_R^h \quad et \quad \mathrm{H}^1(\mathcal{N}_R) \cong \{0\}.$$

La partie horizontale du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ coïncide avec $\mathfrak{N}_R^h$ si et seulement si la connexion est plate.

Démonstration L'algèbre de Lie $\mathfrak{N}_R^h$ est une distribution involutive de classe C^∞ de $\mathcal{T}M$, alors la première partie des résultats découlent directement de ceux de [2, pp. 140–141].

Si la connexion est plate, alors il existe une structure de feuilletage régulier $\mathfrak{F}$ de dimension n sur $\mathcal{T}M$, *cf.* [6, p. 6], telle que $\mathfrak{N}_R^h$ est égal à l'algèbre de Lie $L_{\mathfrak{F}}$ des champs de vecteurs tangents au feuilletage. Le normalisateur de $L_{\mathfrak{F}}$ coïncide à l'algèbre de Lie des champs infinitésimaux de $\mathfrak{F}$. Ainsi, en utilisant la propriété du feuilletage, la partie horizontale de ce normalisateur est $\mathfrak{N}_R^h$.

Rappelons qu'un point x d'une variété différentiable est un point régulier d'une distribution Δ s'il existe un voisinage de x tel que la restriction de Δ sur ce voisinage

https://doi.org/10.4153/CMB-2015-022-2 Published online by Cambridge University Press

est régulière (ou de rang constant). Réciproquement, on suppose que la connexion est non plate. L'ensemble des points réguliers d'une distribution est un ouvert dense dans la variété où elle est définie. Comme $\mathcal{T}M$ est localement connexe et la courbure est non nulle, alors il existe un ensemble ouvert de $\mathcal{T}M$ où le rang de la distribution est une constante $0 < k \leq n-2$. Par suite, on peut trouver une carte adaptée de système de coordonées (x^i, y^i) où $\mathfrak{N}_R^h$ est $\{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\}_{1\leq i\leq k}$. Ainsi, le normalisateur sur cette carte contient l'ensemble des $X^j(x^i, i \neq 1,\dots,k; y^l)\frac{\partial}{\partial x^j}{}_{k+1\leq j\leq n} + Y^j(x^i, i\neq 1,\dots,k; y^l)\frac{\partial}{\partial y^j}$. Donc, $X^{j_0}(x^i, i \neq 1,\dots,k; y^l)\frac{\partial}{\partial x^{j_0}} - \Gamma_{j_0}^j X^{j_0}\frac{\partial}{\partial y^j}$ avec $j_0 \geq k+1$ sont des éléments de la partie horizontale du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ dans cet ouvert. Par suite, $h(\mathcal{N}_R)$ est différente de $\mathfrak{N}_R^h$. ∎

En utilisant la décomposition de $\mathcal{N}_R$ en une somme directe de modules $h(\mathcal{N}_R)$ et $v(\mathcal{N}_R)$, on a le suivant.

Corollaire 3.6 *La connexion est plate si et seulement si le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{N}_R^h$ est isomorphe (en tant que module) à la partie verticale du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$.*

Remarque 3.7 Il est à noter que la partie horizontale $h(\mathcal{N}_R)$ du normalisateur de $\mathfrak{N}_R^h$ est différente de l'ensemble $\mathcal{N}_R \cap h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$. S'il existe une carte où $\mathfrak{N}_R^h$ est de rang $k > 0$ et $\mathfrak{N}_R^h(\Gamma_{j_0}^j) = \{0\}$ pour un $k < j_0 \leq n$ et pour tout j, alors Γ est plate si et seulement si $\mathcal{N}_R \cap h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$ coïncide à $\mathfrak{N}_R^h$. La démonstration de cette dernière assertion est la même que celle de la deuxième partie du théorème 3.5 mais avec quelques petites modifications.

Définition 3.8 On définit l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma = \{X \in \chi(\mathcal{T}M)$ tel que $[X,\Gamma] = 0\}$ où $[X,\Gamma] = 0$ veut dire que $\Gamma[X,Y] = [X,\Gamma(Y)]$ pour tout $Y \in \chi(\mathcal{T}M)$. Localement, si $(x^i)_{i=1,\dots,2n}$ sont les coordonnées naturelles sur $\mathcal{T}M$, la connexion $\Gamma = \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$, et $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ appartient à A_Γ si et seulement s'il satisfait le système de $4n^2$ équations linéaires aux dérivées partielles, *cf.* [6] :

$$X^i\frac{\partial\Gamma_k^j}{\partial x^i} - \Gamma_i^j\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma_k^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i} = 0.$$

On essaie de déterminer les dérivations de $\mathfrak{A}_\Gamma$ dont on examinera particulièrement par la suite sa partie horizontale.

Désignons par $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ l'ensemble $\{X \in \mathfrak{A}_\Gamma$ tel que $h(X) = X\}$ et par $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ celui des X appartenant à $\mathfrak{A}_\Gamma$ tel que $v(X) = X$. En utilisant directement la définition 3.8, on a $\mathfrak{A}_\Gamma = \mathfrak{A}_h$. La proposition s'en suit.

Proposition 3.9 *Tous les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma$ sont projetables.*

Démonstration Soit $X \in \mathfrak{A}_\Gamma$, d'après ce qui précède $\forall Y \in \chi(\mathcal{T}M)$, on a l'égalité $[X, hY] = h[X,Y]$. Comme h est semi-basique, alors il s'annule sur l'espace vertical, *cf.* [5] ; on obtient $h[X, JY] = [X, hJY] = 0$. Et par l'expression de J, $J[X,JY] = 0$ pour tout $Y \in \chi(\mathcal{T}M)$. Alors X est projetable, *cf.* [6]. ∎

Proposition 3.10 *Les ensembles $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ et $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ sont des idéaux de $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$ et de $\mathfrak{A}_\Gamma$. Ces idéaux forment un produit direct.*

Démonstration Soient $X \in \mathfrak{A}_\Gamma^h$ et $Y \in \mathfrak{A}_\Gamma$, $\Gamma[Y,X] = [Y,\Gamma X] = [Y,X]$. Donc $[Y,X] \in \mathfrak{A}_\Gamma^h$ et $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un idéal de $\mathfrak{A}_\Gamma$. Par ailleurs, $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est contenu dans $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$. En effet, l'expression de R est

$$R(X,Y) = [\Gamma X, \Gamma Y] - \Gamma[\Gamma X, Y] + \Gamma^2[X,Y] - \Gamma[X,\Gamma Y], \quad \forall Y \in \chi(\mathcal{T}M). \tag{3.1}$$

En utilisant $\Gamma[X,Y] = [X,\Gamma Y]$, on a $R(X,Y) = 0$. Ainsi, il est immédiat que l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un idéal de $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$.

On raisonne de la même manière que précédemment pour $\mathfrak{A}_\Gamma^v$.

Soient $X \in \mathfrak{A}_\Gamma^h$ et $Y \in \mathfrak{A}_\Gamma^v$, alors $\Gamma[X,Y] = [X,\Gamma(Y)] = [\Gamma(X),Y]$. On en tire que $[X,Y] = -[X,Y]$, et $[X,Y] = 0$. D'où le résultat. ∎

Remarque 3.11 On peut même montrer que $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un idéal de tout sous-module de $\mathfrak{A}_\Gamma$ qui le contient.

Proposition 3.12 *On note par H^0 l'ensemble des champs horizontaux projetables, alors $\mathfrak{A}_\Gamma^h = H^0 \cap \mathfrak{N}_R$.*

Démonstration D'après la proposition 3.9 et la proposition 3.10, on peut montrer que $\mathfrak{A}_\Gamma^h \subset H^0 \cap \mathfrak{N}_R$.

Soit $X \in H^0 \cap \mathfrak{N}_R$, un champ $X \in \mathfrak{N}_R$ signifie d'après l'expression de R que $[hX,h] - h[X,h] = 0$. Or le champ X est projetable alors $[hX,h] = 0$. Donc le champ horizontal $hX \in \mathfrak{A}_h = \mathfrak{A}_\Gamma$. Comme X est horizontal alors $hX = X$. Ainsi $X \in \mathfrak{A}_\Gamma^h$ et $H^0 \cap \mathfrak{N}_R \subset \mathfrak{A}_\Gamma^h$. ∎

Remarque 3.13 On constate d'après la proposition 3.12 que l'idéal horizontal $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est inclus dans l'espace de nullité horizontal, car il est l'intersection de l'espace de nullité horizontal et de l'ensemble des champs de vecteurs projetables. En général, $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{N}_R^h$. L'algèbre de Lie peut être réduit à zéro, c'est le cas de celui de l'exemple 2.4.

Proposition 3.14 *On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifie (H). On note par $\mathfrak{C}_\Gamma$ le centralisateur de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$. Alors la partie horizontale de ce centralisateur est nul et $\mathfrak{C}_\Gamma \cap \mathfrak{A}_\Gamma = \mathfrak{A}_\Gamma^v$.*

Démonstration Si X est dans ce centralisateur horizontal, alors $[X,\mathfrak{A}_\Gamma^h] = \{0\}$. D'après la proposition 3.12, l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un $F(M)$-module ; pour tout $f \in F(M)$, $[X, f\mathfrak{A}_\Gamma^h] = X(f)\mathfrak{A}_\Gamma^h = \{0\}$. Par suite, $X(f) = 0$ car $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifie (H). Le champ X étant horizontal, alors $X = 0$. Par ailleurs, d'après ce qui précède, le centralisateur de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ dans $\mathfrak{A}_\Gamma$ est inclus dans sa partie verticale $\mathfrak{C}_\Gamma^v$. Donc $\mathfrak{C}_\Gamma^v \cap \mathfrak{A}_\Gamma$ est contenu dans $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ car $\mathfrak{C}_\Gamma^v$ est vertical. D'après la proposition 3.10, $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ commute avec $\mathfrak{A}_\Gamma^h$, alors $\mathfrak{A}_\Gamma^v \subset \mathfrak{C}_\Gamma \cap \mathfrak{A}_\Gamma = \mathfrak{C}_\Gamma^v \cap \mathfrak{A}_\Gamma$. ∎

https://doi.org/10.4153/CMB-2015-022-2 Published online by Cambridge University Press

Définition 3.15 Le relèvement complet de $X \in \chi(M)$ sur le fibré TM est noté $\bar{X}$. En coordonnées locales sur TM, $(x^i, y^j)_{1\leq i,j\leq n}$ où $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a

$$\bar{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{avec } i, j = 1, \dots, n.$$

Le relèvement complet d'une partie A de $\chi(M)$ est $\bar{A} = \{\bar{X} \text{ tel que } X \in A\}$.

Proposition 3.16 *Soient l'application $\Pi\colon \mathcal{T}M \to M$, le fibré des vecteurs non nul tangent à M et Π_* son application tangente, l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}^h_\Gamma$ est isomorphe à $\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)$.*

Démonstration D'après la proposition 3.12, $\Pi_*[\mathfrak{A}^h_\Gamma, \mathfrak{A}^h_\Gamma] = [\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma), \Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)]$. De la relation $[\mathfrak{A}^h_\Gamma, \mathfrak{A}^h_\Gamma] \subset \mathfrak{A}^h_\Gamma$, on a $[\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma), \Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)] \subset \Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)$.

En considérant l'application $f\colon \Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma) \to \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}$ avec $f(X) = \bar{X}$, on peut vérifier que f est bijective.

On a $\overline{[X, Y]} = [\bar{X}, \bar{Y}] \forall X, Y \in \Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)$, alors

$$\overline{[\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma), \Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)]} = [\overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}, \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}].$$

Ce qui donne $[\overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}, \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}] \subset \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}$. Et $\overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}$ est une algèbre de Lie, et $\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)$ est isomorphe à $\overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}$.

Par suite, soit la restriction de h suivante $h\colon \overline{\Pi_*(H^0 \cap \mathfrak{N}_R)} \to \mathfrak{A}^h_\Gamma$. Il est facile de montrer qu'elle est bien définie et surjective. On a de même $\operatorname{Ker}(h) = 0$ sur $\overline{\Pi_*(H^0 \cap \mathfrak{N}_R)}$. Donc cette restriction de h est bijective.

Le champ de vecteurs $\bar{X}$ étant projetable ; d'après la preuve de la proposition 3.12 on a $[h\bar{X}, h] = 0$ et $h[\bar{X}, \bar{Y}] = h[\bar{X}, h\bar{Y}]$ pour tout $\bar{Y} \in \overline{\chi(M)}$. Ainsi R s'écrit

$$R(\bar{X}, \bar{Y}) = [h\bar{X}, h\bar{Y}] - h[\bar{X}, h\bar{Y}] = [h\bar{X}, h\bar{Y}] - h[\bar{X}, \bar{Y}].$$

Si $\bar{X}, \bar{Y} \in \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)}$, d'après ce qui précède $h\bar{X}, h\bar{Y} \in \mathfrak{A}^h_\Gamma$. Par conséquent, $R(\bar{X}, \bar{Y})$ est horizontal. Comme R est semi-basique alors $R(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ et $h[\bar{X}, \bar{Y}] = [h\bar{X}, h\bar{Y}]$.

On démontre alors que $\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}^h_\Gamma$ en considérant l'application $h \circ f$. ∎

Proposition 3.17 *On note par $\mathcal{N}_\Gamma$ le normalisateur de $\mathfrak{A}^h_\Gamma$ dans $\chi(\mathcal{T}M)$. On a désigné par $\mathcal{C}^v_\Gamma$ l'ensemble $\mathcal{C}_\Gamma \cap v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$, on obtient $\mathcal{N}_\Gamma = h(\mathcal{N}_\Gamma) \oplus \mathcal{C}^v_\Gamma$ en tant que module.*

Démonstration Soient $X^1 \in \mathfrak{A}^h_\Gamma$ et $Y \in \mathcal{N}_\Gamma$. En décomposant Y sur les sous-espaces propres de Γ, on a $Y = Y^1 + Y^2$ avec $Y^1 \in h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$, $Y^2 \in v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$. Donc on obtient que $[Y^1, X^1] + [Y^2, X^1]$ appartient $\mathfrak{A}^h_\Gamma$. Par ailleurs, les égalités suivantes sont obtenues en utilisant directement la définition du champ de vecteurs X_1,

$$\Gamma[Y^1, X^1] = [\Gamma Y^1, X^1] = [Y^1, X^1]$$

et

$$\Gamma[Y^2, X^1] = [\Gamma Y^2, X^1] = -[Y^2, X^1].$$

On en déduit que

$$\Gamma([Y^1, X^1] + [Y^2, X^1]) = [Y^1, X^1] - [Y^2, X^1] \in \mathfrak{A}^h_\Gamma. \tag{3.2}$$

Alors les $[Y^1, X^1]$ et $[Y^2, X^1]$ sont dans $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ et donc $Y^1, Y^2 \in \mathcal{N}_\Gamma$. Or l'image par Γ de $[Y^1, X^1] + [Y^2, X^1]$ est égal à $[Y^1, X^1] + [Y^2, X^1]$ par définition de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$. Ainsi par la relation (3.2) on a $[Y^2, X^1] = 0$ et $Y^2 \in \mathcal{C}_\Gamma^v$. D'où le résultat. ■

Proposition 3.18 *L'algèbre de Lie $\mathcal{C}_\Gamma^v$ est un idéal de $\mathcal{N}_\Gamma$. On note par $\mathcal{N}$ le normalisateur de $\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$ dans $\chi(M)$, si l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifie (H) alors les éléments de $h(\mathcal{N}_\Gamma)$ sont projetables et*

$$\mathcal{N} \cong \mathcal{N}_\Gamma / \mathcal{C}_\Gamma^v.$$

Démonstration

- Le centralisateur $\mathcal{C}_\Gamma$ étant toujours un idéal de $\mathcal{N}_\Gamma$ *cf.* [4], on a une somme directe de modules $\mathcal{C}_\Gamma = \mathfrak{C}_\Gamma^h \oplus \mathcal{C}_\Gamma^v$. De la proposition 3.14, on trouve que $\mathcal{C}_\Gamma^v$ est un idéal de $\mathcal{N}_\Gamma$.
- Soient $Y \in \mathcal{N}_\Gamma$ et $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifiant (H). D'après le théorème de Fröbenius et la proposition 3.12, il existe en tout point de $\mathcal{T}M$ une carte qui le contient, de système de coordonnées (x^i, y^j) tels que $Y(F(x^i)) = Y^j \frac{\partial F(x^i)}{\partial x^j} \subset F(x^i)$ et $Y^j \in F(x^i)$, où $F(x^i)$ l'ensemble des fonctions qui ne dépendent que des x^i. Donc tous les éléments de $\mathcal{N}_\Gamma$ sont projetables, ainsi que ceux de $h(\mathcal{N}_\Gamma)$. En utilisant la proposition 3.17, on a $\mathcal{N}_\Gamma = h(\mathcal{N}_\Gamma) \oplus \mathcal{C}_\Gamma^v$. Alors la restriction de $\Pi_*, \Pi_* : \mathcal{N}_\Gamma \to \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)$ est un homomorphisme d'algèbres et a pour noyau $\mathcal{C}_\Gamma^v$. Donc, l'application $\Pi'_* : \mathcal{N}_\Gamma / \mathcal{C}_\Gamma^v \to \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Montrons que $\Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma) = \mathcal{N}$. Si $X \in \mathcal{N}_\Gamma$ alors $\Pi_*[X, \mathfrak{A}_\Gamma^h] \subset \Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$. D'après la proposition 3.12, $[\Pi_*(X), \Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)]$ est inclus dans $\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$. Donc, on en déduit que $\Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma) \subset \mathcal{N}$.

Réciproquement, si $X \in \mathcal{N}$ alors de la proposition 3.16, $[\bar{X}, \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)}] \subset \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)}$. De même, on obtient $h[\bar{X}, \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)}] \subset \mathfrak{A}_\Gamma^h$. Or $\bar{X}$ est projetable, par la preuve de la proposition 3.16, on a

$$h[\bar{X}, \overline{\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)}] = h\big[\bar{X}, h\big(\overline{\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)}\big)\big] = h[\bar{X}, \mathfrak{A}_\Gamma^h] \subset \mathfrak{A}_\Gamma^h.$$

Or $\mathfrak{A}_\Gamma^h \subset \mathfrak{A}_h$ alors $h[\bar{X}, \mathfrak{A}_\Gamma^h] = [h\bar{X}, \mathfrak{A}_\Gamma^h]$. Ainsi $[h\bar{X}, \mathfrak{A}_\Gamma^h] \subset \mathfrak{A}_\Gamma^h$ et $h\bar{X} \in \mathcal{N}_\Gamma$ avec $\Pi_*(h\bar{X}) = X \in \mathcal{N}$. Donc $X \in \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)$ et $\mathcal{N} \subset \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)$. D'où $\Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)$ est égal à $\mathcal{N}$. ■

Théorème 3.19 ([2]) *Une distribution Ω de M est involutive si et seulement si $[\Omega, \Omega] = \Omega$.*

Démonstration Immédiate en utilisant la proposition 2.9 de [2, p. 141]. ■

Théorème 3.20

(i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ (resp. $\mathcal{C}_\Gamma$) est un idéal caractéristique de $\mathfrak{A}_\Gamma$ et de $\mathcal{N}_\Gamma$ (resp. de $\mathcal{N}_\Gamma$). Plus précisement, on a $[\mathfrak{A}_\Gamma^h, \mathfrak{A}_\Gamma^h] = \mathfrak{A}_\Gamma^h$.*

(ii) *Si l'ensemble $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifie (H), alors l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ correspond à la représentation adjointe de son normalisateur $\mathcal{N}_\Gamma$ et les premiers espaces de cohomologie de Chevalley–Eilenberg sont :*

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{A}_\Gamma^h) \cong \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)/\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h), \quad \mathrm{H}^1(\mathcal{N}_\Gamma/\mathcal{C}_\Gamma) \cong \{0\}.$$

Démonstration (i) Il est immédiat que $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un idéal de $\mathcal{N}_\Gamma$. De la proposition 3.12, $\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$ est une distribution involutive de classe C^∞ de M. Donc en vertu du théorème 3.19, on obtient $[\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h), \Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)] = \Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$. Par l'isomorphisme de la proposition 3.16, on a $[\mathfrak{A}_\Gamma^h, \mathfrak{A}_\Gamma^h] = \mathfrak{A}_\Gamma^h$. Alors $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{A}_\Gamma$ et de $\mathcal{N}_\Gamma$ d'après une démonstration classique de [4]. Par l'identité de Jacobi, la propriété de $\mathcal{C}_\Gamma$ et le fait que $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est un idéal caractéristique de $\mathcal{N}_\Gamma$, $\mathcal{C}_\Gamma$ est un idéal caractéristique de $\mathcal{N}_\Gamma$.

(ii) Si $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifie (H), alors par isomorphisme, $\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$ vérifie (H). D'après un théorème de [2], toutes ses dérivations sont des dérivées de Lie par rapport à un champ du normalisateur $\mathcal{N}$. En utilisant les isomorphismes de la proposition 3.16 et de la proposition 3.18, toute dérivation de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est la dérivée de Lie par rapport à un champ de $\mathcal{N}_\Gamma$. Ainsi, d'après [2], $\mathrm{H}^1\big(\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)\big) \cong \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)/\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$, et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{A}_\Gamma^h) \cong \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)/\Pi_*(\mathfrak{A}_\Gamma^h)$ en vertu de la proposition 3.16. De même, toute dérivation de $\mathcal{N}$ est intérieure, alors $\mathrm{H}^1(\mathcal{N}) \cong \{0\}$, et $\mathrm{H}^1(\mathcal{N}_\Gamma/\mathcal{C}_\Gamma) \cong \{0\}$ en appliquant la proposition 3.18. ∎

4 Propriétés de la connexion par l'étude de quelques algèbres de Lie qui lui sont associées

Proposition 4.1 *Un champ de vecteurs X de $\mathcal{T}M$ est un élément de $\mathfrak{A}_\Gamma$ si et seulement si X laisse invariant les distributions généralisées définies par les sous-espaces propres de Γ.*

Démonstration Soient $X \in \mathfrak{A}_\Gamma$ et $Y \in h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$ (resp. $Y \in v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$). On obtient $\Gamma[X,Y] = [X,\Gamma Y]$, donc $\Gamma[X,Y] = [X,Y]$ (resp. $\Gamma[X,Y] = -[X,Y]$).

Réciproquement, soit $X \in \chi(\mathcal{T}M)$ préservant $h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$ et $v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$. Soit Y dans $\chi(\mathcal{T}M)$, Y se décompose en une somme $Y^h + Y^v$ avec $Y^h \in h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$ et Y^v appartient à $v\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$. On a $\Gamma[X,Y] - [X,\Gamma Y] = ([X,Y^h] - [X,Y^v]) - ([X,Y^h] - [X,Y^v]) = 0$. D'où le résultat. ∎

Proposition 4.2 *Un champ vertical X est un élément de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ si et seulement si X commute avec tout champ horizontal projetable. Si on note par $\mathfrak{A}_{H^0}$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs horizontaux projetables, alors $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ est son centralisateur dans $\chi(\mathcal{T}M)$.*

Démonstration On sait que tout champ vertical peut s'écrire comme JX avec $X \in h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$. L'espace vertical est toujours involutif, alors JX est dans $\mathfrak{A}_\Gamma$ si et seulement si JX laisse invariant l'espace horizontal.

Soient U un domaine d'une carte de système de coordonnées (x^i, y^i) de $\mathcal{T}M$, et $X \in h\big(\chi(TU)\big)$. L'ensemble $h\big(\chi(TU)\big)$ étant engendré par $h(\frac{\partial}{\partial x^i})$ sur $F(TU)$. On a $[JX, fh(\frac{\partial}{\partial x^i})] = \big(JX(f)\big)h(\frac{\partial}{\partial x^i}) + f[JX, h(\frac{\partial}{\partial x^i})] \in h\big(\chi(TU)\big)$ pour tout f dans $F(TU)$ est équivalent à $[JX, h(\frac{\partial}{\partial x^i})] = 0$. Comme $\mathfrak{A}_{H^0}$ est un $F(M)$-module, alors son centralisateur dans l'espace horizontal est nul en raisonnant comme dans la proposition 3.14. Donc, son centralisateur est inclus dans l'espace vertical. D'après ce qui précède, $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ est le centralisateur de $\mathfrak{A}_{H^0}$. ∎

https://doi.org/10.4153/CMB-2015-022-2 Published online by Cambridge University Press

Théorème 4.3 *Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ vérifie (H), alors le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$ est le produit direct de ceux de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ et de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$.*

Démonstration D'après la proposition 3.10, $\mathfrak{A}_\Gamma = \mathfrak{A}_\Gamma^h \times \mathfrak{A}_\Gamma^v$ est un produit direct. En vertu du théorème 3.20, $[\mathfrak{A}_\Gamma^h, \mathfrak{A}_\Gamma^h] = \mathfrak{A}_\Gamma^h$; et de la première partie de la proposition 3.14, le centre de $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ est nul. Ainsi, d'après le lemme 3.7 de [7, p. 8], on a le résultat. ■

Théorème 4.4 *Le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$ est nul si et seulement si la connexion Γ est plate.*

Démonstration On suppose que toute dérivation de $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$ est intérieure. Or, on a $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R = \mathfrak{A}_\Gamma^h \otimes \mathfrak{A}_\Gamma^v$, alors en vertu de la proposition 4.2, $\mathfrak{A}_\Gamma^h = \mathfrak{A}_{H^0}$. Sur un domaine d'une carte U de coordonnées locales (x^i, y^i), $(\mathfrak{A}_{H^0})_U$ contient chaque élément de base de l'espace horizontal $\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$. Comme l'espace vertical est contenu dans $\mathfrak{N}_R$, par suite, chaque $\frac{\partial}{\partial x^i} \in (\mathfrak{N}_R)_U$. Or $(\mathfrak{N}_R)_U$ est une distribution de TU, donc $\chi(U) \subset (\mathfrak{N}_R)_U$, pour tout U. Ainsi, $\mathfrak{N}_R = \chi(\mathcal{T}M)$ et que $R = 0$. C'est-à-dire que la connexion est plate.

Réciproquement, si la connexion est plate, la distribution $\Delta\colon x \in \mathcal{T}M \mapsto \operatorname{Im} h_x$ est intégrable, *cf.* [6]. Pour cette raison, il existe une structure de feuilletage sur $\mathcal{T}M$. Par ailleurs, l'espace de nullité de la courbure $\mathfrak{N}_R$ est $\chi(\mathcal{T}M)$. D'après la proposition 3.12, on a $\mathfrak{A}_\Gamma^h = H^0$. En tenant compte du feuilletage sur $\mathcal{T}M$, on peut affirmer que $\mathfrak{A}_\Gamma^h = \chi(M)$. Et par la proposition 4.2, $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ est localement $\chi(\mathbb{R}^n)$. Alors, à l'aide de la proposition 4.3 et d'un résultat de [2], le premier espace de cohomologie de Chevalley–Eilenberg de $\mathfrak{A}_\Gamma \cap \mathfrak{N}_R$ est nul. ■

Remarque 4.5 Ce théorème est en partie une réponse à une question posée par [6, p. 6] dans le cas où la forme vectorielle est une connexion au sens de Grifone.

Proposition 4.6 *La connexion Γ est plate si et seulement si le centralisateur de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ dans l'espace vertical est réduit à zéro.*

Démonstration Dans le cas où la connexion est plate, $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ est localement égal à $\chi(\mathbb{R}^n)$. Ainsi son centralisateur dans l'espace vertical est égal à $\{0\}$ d'après [2]. Réciproquement, par la proposition 4.2, $\mathfrak{A}_{H^0}$ est inclus dans le centralisateur de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$. Si le centralisateur vertical de $\mathfrak{A}_\Gamma^v$ est nul, alors $v(\mathfrak{A}_{H^0})$ est réduit à zéro car $\mathfrak{A}_\Gamma^v \subset \mathfrak{A}_\Gamma$. De l'équation (3.1), $R(X,Y) \subset v(\mathfrak{A}_{H^0})$ pour tous $X, Y \in H^0$. On a $R(X,Y) = 0$ pour tous $X, Y \in H^0$. Par le fait que les éléments de H^0 engendrent $h\big(\chi(\mathcal{T}M)\big)$ et que R est linéaire et semi-basique, alors $R(X,Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \chi(\mathcal{T}M)$. D'où, la courbure est nulle et la connexion est plate. ■

Remarque 4.7 La connexion est plate si et seulement si l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_\Gamma^h$ (resp. $\mathfrak{N}_R^h$) est engendrée par tous les champs horizontaux projetables sur $F(M)$ (resp. sur $F(\mathcal{T}M)$).

Exemple 4.8 Soient $M = \mathbb{R}^4$ de système de coordonnées dans $T\mathbb{R}^4$ $(x^i, y^i)_{1\le i\le 4}$, et Γ une connexion telle que $\Gamma_2^1 = -\frac{y^2}{2} e^{x^1}$, $\Gamma_1^2 = \frac{y^2}{2}$, $\Gamma_2^2 = \frac{y^1}{2}$, et les autres nuls. Les

https://doi.org/10.4153/CMB-2015-022-2 Published online by Cambridge University Press

coefficients de la courbure R sont

$$R^1_{2,1} = \frac{y^2}{2}e^{x^1}, \quad R^2_{2,1} = -\frac{y^1}{4}$$

et les autres nuls.

Les expressions X^i et Y^i sont dans toute la suite des fonctions C^∞ de $T\mathbb{R}^4$.

L'espace de nullité de la courbure $\mathfrak{N}_R$ est,

$$\mathfrak{N}_R = \left\{ X^3\frac{\partial}{\partial x^3} + X^4\frac{\partial}{\partial x^4} + Y^i\frac{\partial}{\partial y^i} \right\}.$$

Ici, l'espace de nullité est involutif car il est engendré par des champs projetables.

On a

$$\mathfrak{N}^h_R = \left\{ X^3\frac{\partial}{\partial x^3} + X^4\frac{\partial}{\partial x^4} \right\}.$$

Le centralisateur de $\mathfrak{N}^h_R$ est réduit à zéro, son normalisateur est

$$\mathcal{N}_R = \left\{ X^3\frac{\partial}{\partial x^3} + X^4\frac{\partial}{\partial x^4} + \underset{i\neq 3,4}{X^i(\overset{\wedge}{x^3},\overset{\wedge}{x^4})}\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i(\overset{\wedge}{x^3},\overset{\wedge}{x^4})\frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$$

où dans toute la suite, $X(\overset{\wedge}{x^i})$ désigne que l'expression de X ne dépend pas de x^i.

Le champ $\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y^2}$ est dans la partie horizontale de ce normalisateur mais n'appartenant pas à la partie horizontale de l'espace de nullité. Ce qui confirme que la connexion est non plate.

Dans la suite, $\overline{A}$ désigne la classe d'équivalence de A définie par un quotient d'algèbres de Lie.

On obtient $\mathrm{H}^1(\mathcal{N}_R) \cong \{0\}$. Et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{N}^h_R) \cong \mathcal{N}_R/\mathfrak{N}^h_R$ qui est

$$\overline{\left\{ X^i_{(i\neq 3,4)}(\overset{\wedge}{x^3},\overset{\wedge}{x^4})\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i(\overset{\wedge}{x^3},\overset{\wedge}{x^4})\frac{\partial}{\partial y^i} \right\}}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{A}^h_\Gamma$ est donnée par

$$\mathfrak{A}^h_\Gamma = \left\{ X^3(x^t)\frac{\partial}{\partial x^3} + X^4(x^t)\frac{\partial}{\partial x^4} \right\}.$$

Le normalisateur de $\mathfrak{A}^h_\Gamma$ dans $\chi(T\mathbb{R}^4)$ est donc

$$\mathcal{N}_\Gamma = \left\{ X^3(x^t)\frac{\partial}{\partial x^3} + X^4(x^t)\frac{\partial}{\partial x^4} + X^i_{(i\neq 3,4)}(x^t, t\neq 3,4)\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i(x^t, y^j, t\neq 3,4)\frac{\partial}{\partial y^i} \right\}.$$

Et le centralisateur de $\mathfrak{A}^h_\Gamma$ dans $\chi(T\mathbb{R}^4)$ coïncide à

$$\mathcal{C}_\Gamma = \left\{ Y^i(x^t, y^j, t\neq 3,4)\frac{\partial}{\partial y^i} \right\}.$$

Ainsi $\mathcal{N}_\Gamma/\mathcal{C}_\Gamma$ est

$$\overline{\{ X^3(x^t)\frac{\partial}{\partial x^3} + X^4(x^t)\frac{\partial}{\partial x^4} + X^i_{(i\neq 3,4)}(x^t, t\neq 3,4)\frac{\partial}{\partial x^i} \}}.$$

On a alors $\mathrm{H}^1(\mathcal{N}_\Gamma/\mathcal{C}_\Gamma) \cong \{0\}$, et $\mathrm{H}^1(\mathfrak{A}^h_\Gamma) \cong \Pi_*(\mathcal{N}_\Gamma)/\Pi_*(\mathfrak{A}^h_\Gamma)$ est

$$\overline{\{ X^i_{(i\neq 3,4)}(x^t, t\neq 3,4)\frac{\partial}{\partial x^i} \}}.$$

Références

[1] M. Anona, P. Randriambololondrantomalala et H. S. G. Ravelonirina, *Sur les algèbres de Lie des champs de vecteurs polynomiaux*. Afr. Diaspora J. Math. **10**(2010), 87–95.

[2] ______, *Sur les algèbres de Lie d'une distribution et d'un feuilletage généralisé*. Afr. Diaspora J. Math. **10**(2010), 135–144.

[3] ______, *Sur les algèbres de Lie d'un système de champs de vecteurs permutables.* Ital. J. Pure Appl. Math. **29**(2012), 163–174.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, Paris, 1960.

[5] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions I*. Ann. Inst. Fourier Grenoble **22**(1972), 287–334. http://dx.doi.org/10.5802/aif.407

[6] J. Klein, *On Lie Algebras of vector fields defined by vector forms.* Colloq. Math. Soc. János Bolyai **46**, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[7] N. Nakanishi, *The first cohomology groups of infinite dimensional Lie algebras.* Pub. RIMS. Kyoto Univ. **18**(1982), 1–16. http://dx.doi.org/10.2977/prims/1195184013

[8] N. L. Youssef, *Sur les tenseurs de courbure de la connexion de Berwald et ses distributions de nullité.* Tensor N.S. **36**(1982), 275–280.

[9] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*. Cambridge Stud. Adv. Math. **38**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo, BP 906, Ambohitsaina 101-Antananarivo, Madagascar
courriel: princypcpc@yahoo.fr rhsammy@yahoo.fr mfanona@yahoo.fr