

SUR LES FONCTIONS POLYHARMONIQUES ET LE PROBLEME DE RIQUIER

*En hommage à Monsieur le professeur Katuji ONO à
l'occasion de sa 60ème année*

MASAYUKI ITO

1. Introduction

Soit Ω un ouvert de l'espace euclidien R^n à $n(\geq 2)$ dimensions. Les recherches des fonctions harmoniques dans Ω sont essentielles dans la théorie classique du potentiel. A ce moment-là, il est bien connu que le balayage pour le noyau de Green dans Ω joue un grand rôle (par exemple, cf. M. BreLOT [1]).

D'autre part, quelques travaux ont été consacrés à l'étude de la fonction polyharmonique dans Ω , et on sait maintenant que les résultats sont souvent pareils à la théorie des fonctions harmoniques dans Ω (cf. M. Nicolesco [3]). Mais il était nécessaire de faire quelques restrictions, car on ne connaissait pas de balayage pour le noyau polypotentiel.

Nous considérerons ici le balayage pour le noyau polypotentiel dans Ω , qui sera très différent du balayage ordinaire. Il en résultera immédiatement le théorème de valeur moyenne pour la fonction polyharmonique dans Ω , et puis nous donnerons la solution explicite du problème de Riquier pour l'équation polyharmonique $\Delta^p u = 0$ et pour un ouvert borné de R^n . Il sera caractéristique de voir que les points irréguliers seront les mêmes que pour l'équation de Laplace. Cette étude précise la note [2].

2. Le noyau polypotentiel et le balayage

Dans cette section, on supposera toujours que X sera un ouvert borné de R^n à $n \geq 2$. On pose, pour un entier $p \geq 1$,

$$N^{(p)}(x, y) = \int \cdots \int G(x, z_1)G(z_1, z_2) \cdots G(z_{p-1}, y) dz_1 \cdots dz_{p-1},$$

Received December 17, 1968

où G est la fonction de Green dans X . La fonction $N^{(p)}$ est positive, symétrique et continue au sens large dans $X \times X$; elle est finie et continue dans $X \times X - \delta$, où δ est la diagonale de $X \times X$. Si G est convenablement normalisée, on a

$$(\mathcal{A}_y)^p N^{(p)}(x, y) = (-1)^p \varepsilon_x$$

au sens des distributions dans Ω , où ε_x est la mesure de Dirac à x . Pour une mesure de Radon positive μ dans X , on note $N^{(p)}\mu(x)$ la valeur en x du potentiel de μ par rapport au noyau $N^{(p)}$. Les fonctions $N^{(p)}(x, y)$ et $N^{(p)}\mu(x)$ s'appellent respectivement le noyau polypotentiel d'ordre p et le potentiel d'ordre p de μ .

THÉORÈME 1 (*le théorème du balayage*): Soit $p \geq 1$. A un système $(\mu_i)_{i=1}^p$ de mesures de Radon positives dans X , de masse totale finie, et à un fermé F de X , on peut associer un système $(\mu'_i)_{i=1}^p$ de mesures positives portée par F , et un seul tel qu'on ait

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)}\mu_i(x) &\geq \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)}\mu'_i(x) \quad \text{partout dans } X, \\ \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)}\mu_i(x) &= \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)}\mu'_i(x) \quad \text{quasi partout sur } F, \\ \sum_{i=1}^{p-1} N^{(p-i)}\mu_i(x) &= \sum_{i=1}^{p-1} N^{(p-i)}\mu'_i(x) \quad \text{quasi partout sur } F, \\ &\dots\dots\dots, \\ N^{(1)}\mu_1(x) &= N^{(1)}\mu'_1(x) \quad \text{quasi partout sur } F. \end{aligned}$$

On dit qu'une propriété a lieu quasi partout si elle a lieu sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle pour le noyau de Green ou ce qui revient au même, pour le noyau newtonien (logarithmique pour $n = 2$).

Démonstration. Nous remarquons d'abord que le potentiel d'ordre 1 de μ_i est finie quasi partout dans X et l'on a $\int N^{(1)}\mu_i(x)dx < +\infty$. Donc, pour $1 \leq i \leq p$ et pour $2 \leq j \leq p$, $N^{(j)}\mu_i$ est finie quasi partout dans X .

Soit μ'_1 la mesure balayée de μ_1 sur F relativement au noyau G , on obtient alors

$$\begin{aligned} N^{(1)}\mu_1(x) &\geq N^{(1)}\mu'_1(x) \quad \text{partout dans } X, \\ N^{(1)}\mu_1(x) &= N^{(1)}\mu'_1(x) \quad \text{quasi partout sur } F. \end{aligned}$$

Ensuite, soit μ'_2 la mesure balayée de $(N^{(1)}\mu_1 - N^{(1)}\mu'_1) + \mu_2$ relativement à G .
Ayant

$$N^{(2)}\mu_1(x) - N^{(2)}\mu'_1(x) + N^{(1)}\mu_2(x) = \int G(x, y)((N^{(1)}\mu_1(y) - N^{(1)}\mu'_1(y))dy + d\mu_2(y)),$$

on a

$$\begin{aligned} N^{(2)}\mu_1(x) + N^{(2)}\mu_2(x) &\geq N^{(2)}\mu'_1(x) + N^{(1)}\mu'_2(x) \quad \text{partout dans } X, \\ N^{(2)}\mu_1(x) + N^{(1)}\mu_2(x) &= N^{(2)}\mu'_1(x) + N^{(1)}\mu'_2(x) \quad \text{quasi partout sur } F. \end{aligned}$$

En répétant cette action, on obtient un système $(\mu'_i)_{i=1}^p$ de mesures positives portées par F qui vérifie tous les conditions ci-dessus.

Finalement nous montrons l'unicité de ce système. Soit $(\mu''_i)_{i=1}^p$ un autre système qui vérifie les conditions ci-dessus. On a évidemment $\mu'_1 = \mu''_1$, et ensuite on a

$$\begin{aligned} N^{(2)}\mu_1(x) - N^{(2)}\mu'_1(x) + N^{(1)}\mu_2(x) &= \int G(x, y)((N^{(1)}\mu_1(y) - N^{(1)}\mu'_1(y))dy + d\mu_2(y)) \\ &= N^{(1)}\mu''_2(x) \quad \text{quasi partout sur } F. \end{aligned}$$

Par conséquent, μ''_2 doit être la mesure balayée de $(N^{(1)}\mu_1 - N^{(1)}\mu'_1) + \mu_2$ sur F relativement à G , d'où $\mu'_2 = \mu''_2$. De la même manière, on obtient l'unicité. La démonstration est ainsi complète.

On dit que $(\mu'_i)_{i=1}^p$ est le système balayé de $(\mu_i)_{i=1}^p$ sur F relativement au système $(N^{(j)})_{j=1}^p$. Il est facile de voir que si l'on a $\mu_i(F) = 0$ pour tout i , μ'_i est alors portée par la frontière F^* de F . Par la suite on désignera par $(\varepsilon_{x,F}^{(i)})_{i=1}^p$ le système balayé de $(\varepsilon_x, 0, \dots, 0)$ sur F .

PROPOSITION 1. Soient X_1 et X_2 deux ouverts bornés de R^n , et soient $N_1^{(i)}$ et $N_2^{(i)}$ respectivement les noyaux polypotentiels d'ordre i dans X_1 et dans X_2 . Pour un système $(\mu_i)_{i=1}^p$ de mesures de Radon positives à support compact dans $X_1 \cap X_2$ et pour un fermé F dont le complément CF est borné dans $X_1 \cap X_2$, on a $\mu'_{i,1} = \mu'_{i,2}$ pour tout $1 \leq i \leq p$, où $(\mu'_{i,1})_{i=1}^p$ et $(\mu'_{i,2})_{i=1}^p$ sont respectivement les systèmes balayés de $(\mu_i)_{i=1}^p$ sur F relativement à $(N_1^{(i)})_{i=1}^p$ et à $(N_2^{(i)})_{i=1}^p$.

En effet, soit $N_{1,2}^{(i)}$ le noyau polypotentiel d'ordre i dans $X_1 \cap X_2$, et soit $(\nu'_i)_{i=1}^p$ le système balayé de $(\mu_i)_{i=1}^p$ sur F relativement à $(N_{1,2}^{(i)})_{i=1}^p$. Il est facile de voir que $\mu'_{i,1} = \nu'_i$ et que $\mu'_{i,2} = \nu'_i$.

PROPOSITION 2. Soit e un sous-ensemble borélien de F . La fonction $f_i(x) = \varepsilon_{x,F}^{(i)}(e)$ est analytique dans CF pour tout i .

En effet, il est bien connu que f_1 est analytique dans CF (cf. M. Brelot [1]). D'après l'égalité

$$f_2(x) = \int (G(x, y) - G(x, z)) d\epsilon_{y, F}^{(1)}(z) \epsilon_{y, F}^{(1)}(e) dy,$$

il est facile de montrer que f_2 est analytique dans CF . Au moyen de l'induction, on peut montrer que f_i est analytique dans CF pour tout i .

Soit Ω un ouvert dans X . On désigne par $N_{\Omega}^{(p)}$ le noyau polypotentiel d'ordre p dans Ω . Alors on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Pour tous les points x et y de Ω , on a*

$$N_{\Omega}^{(p)}(x, y) = N^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)} \epsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}(y).$$

En effet, le cas de $p = 1$ est bien connu. Supposons que

$$N_{\Omega}^{(p-1)}(x, y) = N^{(p-1)}(x, y) - \sum_{i=1}^{p-1} N^{(p-i)} \epsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}(y)$$

dans $\Omega \times \Omega$. Alors on obtient, d'après le théorème 1, que, pour tous les points x et y de Ω ,

$$\begin{aligned} & N^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)} \epsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}(y) \\ &= \int G(y, z) N_{\Omega}^{(p-1)}(z, x) dz - \int G(y, z) d\epsilon_{x, C_{\Omega}}^{(p)}(z) \\ &= \int G(y, z) N_{\Omega}^{(p)}(z, x) dz - \iint G(y, u) d\epsilon_{x, C_{\Omega}}^{(1)}(u) N_{\Omega}^{(p-1)}(z, x) dz \\ &= \int G_{\Omega}(y, z) N^{(p-1)}(z, x) dz = N_{\Omega}^{(p)}(x, y). \end{aligned}$$

D'après l'induction, la démonstration est ainsi complète.

De la proposition ci-dessus, on obtient immédiatement les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. *La fonction $\sum_{i=1}^p N^{(p-j+1)} \epsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}(y)$ dans $\Omega \times \Omega$ est symétrique.*

COROLLAIRE 2. *Pour un point x fixé de Ω , on a*

$$(\Delta_y)^p \left(\sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)} \epsilon_{y, C_{\Omega}}^{(i)}(x) \right) = 0$$

au sens des distributions dans Ω .

PROPOSITION 4. Soit μ une mesure de Radon positive dans X de masse totale finie, et soit F un fermé de X avec $S_\mu \cap F = \phi$, alors on a, pour tout ensemble borélien e de F et pour tout i ,

$$\mu'_i(e) = \int \varepsilon_{x,F}^{(i)}(e) d\mu(x),$$

où $(\mu'_i)_{i=1}^p$ est le système balayé de $(\mu, 0, \dots, 0)$ sur F .

En effet, le cas de $i = 1$ est bien connu (cf. M. Riesz [4]). Soit $i > 1$ et supposons que, pour tout $j \leq i - 1$, $\mu'_j(e) = \int \varepsilon_{x,F}^{(j)}(e) d\mu(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu'_i(e) &= \int (N^{(i-1)}\mu(x) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)}\mu'_j(x)) \varepsilon_{x,F}^{(1)}(e) dx \\ &= \iint (N^{(i-1)}(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)}\varepsilon_{y,F}^{(j)}(x)) d\mu(y) \varepsilon_{x,F}^{(1)}(e) dx \\ &= \iint (N^{(i-1)}(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{(i-j)}\varepsilon_{y,F}^{(j)}(x)) \varepsilon_{x,F}^{(1)}(e) dx d\mu(y) \\ &= \int \varepsilon_{y,F}^{(i)}(e) d\mu(y). \end{aligned}$$

D'après cette proposition, on a évidemment l'inégalité suivante: Pour tout x de X et pour tout fermé F de X ,

$$N^{(p)}\mu(x) \geq \sum_{i=1}^p \int N^{(p-i+1)}\mu(y) d\varepsilon_{x,F}^{(i)}(y),$$

où μ est une mesure positive de masse totale finie.

3. Les fonctions polyharmoniques

Soit Ω un ouvert de R^n . Rappelons qu'une fonction réelle u de classe $C^{2(p-1)}$ dans Ω est polyharmonique d'ordre p si l'on a $\Delta^p u = 0$ dans Ω au sens des distributions. Considérons le théorème de valeur moyenne pour le fonction polyharmonique dans Ω . Nous donnerons d'abord une notation. On désignera par $(\varepsilon_{x,r}^{(i)})_{i=1}^p$ le système balayé de $(\varepsilon_x, 0, \dots, 0)$ sur $CB(x; r)$ relativement au système de noyaux polypotentiels dans un ouvert borné $X \supset \overline{B(x; r)}$, où $B(x; r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r . D'après la proposition 1, $(\varepsilon_{x,r}^{(i)})_{i=1}^p$ est indépendant de X .

THÉORÈME 2. Pour qu'une fonction réelle u de classe $C^{2(p-1)}$ dans Ω soit poly-harmonique d'ordre p dans Ω , il faut et il suffit que, pour toute boule ouverte $B(x; r)$ avec $\overline{B(x; r)} \subset \Omega$, on ait

$$u(x) = \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} u(y) d\varepsilon_{x,r}^{(i)}(y),$$

où $\Delta^0 u = u$.

Démonstration de la condition suffisante. Nous remarquons d'abord que, pour tous les points x et y de Ω et pour tout i , $\varepsilon_{y,r}^{(i)}$ est la mesure obtenue par la translation $y - x$ de $\varepsilon_{x,r}^{(i)}$, et que par suite, il suffit de montrer le lemme suivant:

LEMME 1. Pour tout x de R^n et pour toute suite décroissante (r_m) de nombres > 0 s'annulant avec $m \rightarrow \infty$, il existe une suite (a_m) de nombres > 0 avec $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$ telle qu'on ait, pour toute fonction φ de classe C^{2p} à support compact dans R^n ,

$$(-\Delta)^p \varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m} (\varphi(x) - \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} \varphi(y) d\varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)).$$

En effet, soit X un ouvert borné de R^n avec $X \supset \{x + y; x \in S_\varphi, y \in B(0; r_1)\}$, et soit $N^{(i)}$ le noyau polypotentiel d'ordre i ($i = 1, \dots, p$) dans X . Posons

$$a_m = \int (N^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)} \varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)) dy,$$

alors on a $a_m > 0$ et

$$\begin{aligned} (-\Delta)^p \varphi(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m} \int (-\Delta)^p \varphi(y) (N^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^p N^{(p-i+1)} \varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m} (\varphi(x) - \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} \varphi(y) d\varepsilon_{x,r_m}^{(i)}(y)). \end{aligned}$$

Montrons la condition nécessaire. On prend une boule ouverte $B(x; r)$ avec $\overline{B(x; r)} \subset \Omega$. Soit δ un nombre > 0 avec $\overline{B(x; r + 2\rho)} \subset \Omega$. Alors, pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $B(0; \frac{1}{2}\rho)$, on a $\Delta^p u^* \varphi(x) = 0$ dans un voisinage de $\overline{B(x; r)}$, où u^* est la restriction de u sur $B(x; r + \rho)$. Le support de $u^* \varphi$ étant compact dans Ω , on a

$$u^* \varphi(x) = N_\Omega^{(p)} (-\Delta)^p u^* \varphi(x)$$

dans Ω . Ayant

$$N_{\Omega}^{(p)}(x, y) = \sum_{i=1}^p N_{\Omega}^{(p-i+1)} \varepsilon_{x,r}^{(i)}(y) \text{ dans } \overline{CB(x; r)},$$

on a

$$u' * \varphi(x) = \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} u' * \varphi(y) d\varepsilon_{x,r}^{(i)}(y).$$

φ étant arbitraire, on a

$$u'(x) = \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} u'(y) d\varepsilon_{x,r}^{(i)}(y),$$

nous avons donc notre résultat. La démonstration est ainsi complète.

En explicitant les $\varepsilon_{x,r}^{(i)}$, on retrouve le théorème de valeur moyenne connu pour le fonction polyharmonique (cf. M. Nicolesco [3]). De la même manière, pour tout ouvert Ω_0 dans Ω , la fonction polyharmonique u d'ordre p dans Ω vérifie l'équation suivante: Pour tout x de Ω_0 ,

$$u(x) = \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} u(y) d\varepsilon_{x, C\Omega_0}^{(i)}(y),$$

et par suite, u est évidemment analytique dans Ω .

THÉORÈME 3. Soit Ω un ouvert borné de R^n , et soit $(f_i)_{i=1}^p$ un système de fonctions boréliennes et bornées sur Ω^* . La fonction

$$H_{\Omega}(x; (f_i)_{i=1}^p) = \sum_{i=1}^p \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$$

est polyharmonique d'ordre p dans Ω .¹⁾

Démonstration. Soit $u_i(x) = \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y)$ ($i = 1, \dots, p$). D'après la proposition 2, u_i est analytique dans Ω . On a

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \iint f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) (N^{\zeta(i-1)}(x, z) - \sum_{j=1}^{i-1} N^{\zeta(i-j)} \varepsilon_{x, C\Omega}^{(j)}(z)) dz \\ &= N^{\zeta(i-1)} u_i(x), \end{aligned}$$

et par suite,

1) $(\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)})_{i=1}^p$ est le système balayé de $(\varepsilon_x, 0, \dots, 0)$ sur $C\Omega$ relativement au système de noyaux polypotentiels dans un ouvert borné $X \supset \bar{\Omega}$. Il est indépendant de X (cf. la proposition 3).

$$\Delta^p u_i(x) = (-1)^{i-1} \Delta^{(p-i+1)} u_1(x) = 0$$

dans Ω , car u_1 est harmonique dans Ω . La démonstration est complète.

DÉFINITION 1. La fonction $H_\Omega(x; (f_i)_{i=1}^p)$ s'appelle la solution généralisée du problème de Riquier pour l'équation $\Delta^p u = 0$ et pour la valeur frontière $(f_i)_{i=1}^p$.

DÉFINITION 2. On dit qu'un point x_0 de Ω^* est régulier d'ordre p si l'on a, pour tout système $(f_i)_{i=1}^p$ de fonctions finies et continues sur Ω^* ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} (-\Delta)^{k-1} H_\Omega(x; (f_i)_{i=1}^p) = f_k(x_0) \quad (i = 1, \dots, p).$$

Examinons le point régulier d'ordre p plus précisément. Le théorème typique est le suivant:

THÉORÈME 4. Soit $p \geq 1$. Pour qu'un point x_0 de Ω^* soit régulier d'ordre p il faut et il suffit que x_0 soit régulier au sens du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace.

Démonstration. Soit x_0 un point régulier au sens du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace, on a alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} \int f_1(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) = f_1(x_0)$$

et pour $i > 1$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} (-\Delta_x)^{i-1} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} (-\Delta_x)^{i-1} \iint f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) N_\Omega^{(i-1)}(x, z) dz \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) = f_i(x_0). \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout x de Ω et pour tout $j \geq 1$, on a

$$\Delta^{i-1+j} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) = \Delta^j \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(1)}(y) = 0.$$

D'autre part, on a, pour tout $1 \leq j \leq i-1$,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{i-1-j} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C\Omega}^{(i)}(y) &= \int f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) N_\Omega^{(j)}(x, z) dz \\ &= \int G_\Omega(x, w) N_\Omega^{(j-1)}(w, z) f_i(y) d\varepsilon_{z, C\Omega}^{(1)}(y) dz dw. \end{aligned}$$

En employant l'inégalité

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \iint N_{\Omega}^{(j-1)}(x, z) f_i(y) d\varepsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}(y) dz \right| \leq \left(\sup_{x \in \Omega^*} |f_i(x)| \right) \left(\sup_{x \in \Omega} \int G_{\Omega}(x, z) dz \right)^{j-1},$$

on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} (-\Delta)^{i-1-j} \int f_i(y) d\varepsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}(y) = 0.$$

Par conséquent, on a, pour tout k ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} (-\Delta)^{k-1} H_{\Omega}(x; (f_i)_{i=1}^p) = f_k(x_0).$$

L'inverse est évident, et par suite la démonstration est complète.

Finalement, nous voyons l'unicité de la solution du problème de Riquier.

PROPOSITION 5. *Soit Ω le même que ci-dessus. Si une fonction polyharmonique u d'ordre p et $\Delta^i u$ sont bornées dans Ω et admettent ses limites 0 quasi partout sur Ω^* , on a $u = 0$.*

En effet, soit (Ω_m) une suite croissante d'ouverts bornés avec $\bar{\Omega}_m \subset \Omega$ telle qu'on ait $\cup \Omega_m = \Omega$, alors on a, pour tout x de Ω_m .

$$u(x) = \sum_{i=1}^p \int (-\Delta)^{i-1} u(y) d\varepsilon_{x, C_{\Omega_m}}^{(i)}(y).$$

La suite $(\varepsilon_{x, C_{\Omega_m}}^{(i)})$ converge vaguement vers $\varepsilon_{x, C_{\Omega}}^{(i)}$ avec $m \rightarrow \infty$, et par conséquent, faisant $m \rightarrow \infty$, on a $u(x) = 0$ dans Ω , puisque u et $\Delta^i u$ sont bornées dans Ω .

D'après ce théorème, on obtient immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 3. *Soient Ω et $(f_i)_{i=1}^p$ les mêmes que ci-dessus. On a*

$$(-\Delta)^k H_{\Omega}(x; (f_i)_{i=1}^p) = H_{\Omega}(x; (f_i)_{i=k+1}^p).$$

Remarque. Nous pouvons donner les résultats à ceux-ci pour l'opérateur uniformément elliptique d'ordre 2 au lieu de Δ . Pour cet opérateur, voir C. Stampacchia [5].

RÉFÉRENCES

[1] M. Brelot: Éléments de la théorie classique du potentiel, Les cours de Sorbonne 2eme édition, 1961.

- [2] M. Itô: Étude des fonctions polyharmoniques par la méthode du balayage, C.R. Acad. Paris, **267** (1968), 807–809.
- [3] M. Nicolesco: Les fonctions polyharmoniques, Paris Hermann, 1936.
- [4] M. Riesz: Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Sci. Math., Szeged, **9** (1938), 1–42.
- [5] C. Stampacchia: Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15, 1** (1965), 189–256.

Faculté des Sciences d'Orsay, Orsay (France)
et Institut Mathématique, Université de Nagoya